

目次

章 節		對應數 B 章名	對應數 C 章名
第 1 章 數	頁數		
1-1 絕對值與相反數	01	第一冊 第 1 章	第一冊 第 1 章
1-2 整數的四則運算	04	坐標系與函數圖形	坐標系與函數圖形
1-3 指數	09		
第 2 章 分數的四則運算			
2-1 分數的加減法	10	第一冊 第 3 章 式的運算	第二冊 第 1 章 式的運算
2-2 分數的乘除法	11		
第 3 章 一元一次方程式與不等式			
3-1 一元一次方程式	16	第三冊 第 2 章 方程式	第一冊 第 1 章 坐標系與函數圖形
3-2 一元一次不等式	19		
第 4 章 二元一次（聯立）方程式			
4-1 二元一次方程式及其圖形	21	第一冊 第 2 章 直線方程式	第二冊 第 2 章 直線與圓
4-2 二元一次聯立方程式及其圖形	25	第三冊 第 3 章 二元一次不等式 及其應用	第三冊 第 4 章 一次聯立方程式 與矩陣
第 5 章 乘法公式與因式分解			
5-1 乘法公式	30	第一冊 第 3 章 式的運算	第二冊 第 1 章 式的運算
5-2 因式分解	35		
第 6 章 根式的四則運算			
6-1 平方根與立方根	40		第二冊 第 1 章 式的運算
6-2 根式的運算	42		
第 7 章 一元二次方程式			
7-1 一元二次方程式	49	第三冊 第 2 章 方程式	第二冊 第 1 章 式的運算
第 8 章 函數			
8-1 函數的定義與判別	56	第一冊 第 1 章	第一冊 第 1 章
8-2 線型函數	59	坐標系與函數圖形	坐標系與函數圖形
8-3 二次函數	62		
第 9 章 等差數列與級數			
9-1 等差數列	69	第三冊 第 1 章 數列與級數	第二冊 第 3 章 數列與級數
9-2 等差級數	72		

1

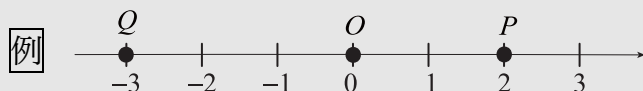
數

1-1 絕對值與相反數

重點整理

絕對值的定義與性質

1. 數線上，代表數 a 的點與原點的距離，稱為 a 的絕對值，以符號 $|a|$ 表示，且 $|a| \geq 0$ 。



P 點與原點的距離為 2，即 $|2| = 2$

Q 點與原點的距離為 3，即 $|-3| = 3$

2. 若 a 為任意實數，則 $|a| = \begin{cases} a & \text{當 } a > 0 \\ 0 & \text{當 } a = 0 \\ -a & \text{當 } a < 0 \end{cases}$

例 $|5| = 5$ ， $|0| = 0$ ， $|-8| = -(-8) = 8$

3. 任意二數相減的絕對值為大數減去小數的差，即

若 $a \geq b$ ，則 $|a - b| = a - b$ ；若 $a < b$ ，則 $|a - b| = -(a - b) = b - a$ 。

例 $|21 - 4| = 21 - 4 = 17$ ， $|8 - 13| = 13 - 8 = 5$

1

範例

練習

試分別寫出 $-\frac{1}{3}$ ，3.9，-5 的絕對值。

《解》 $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$
 $|3.9| = 3.9$
 $|-5| = 5$

試分別寫出 -5.4， $\frac{7}{2}$ ，-9 的絕對值。

《解》

2

範 例

練 習

求下列各式的值：

(1) $|3-4|$

(2) $|15-9.3|$

(3) $|11.7-34.2|$

《解》 (1) $|3-4| = 4-3 = 1$

(2) $|15-9.3| = 15-9.3 = 5.7$

(3) $|11.7-34.2| = 34.2-11.7 = 22.5$

求下列各式的值：

(1) $|10-27|$

(2) $|32-15.6|$

(3) $|14.9-45.3|$

《解》

3

範 例

練 習

求下列各式的值：

(1) $|5-8| + |4-6| - |10-7|$

(2) $|11-4| - |5+1| + |4-9|$

《解》 (1) $|5-8| + |4-6| - |10-7|$
 $= 3 + 2 - 3 = 2$

(2) $|11-4| - |5+1| + |4-9|$
 $= 7 - 6 + 5 = 6$

求下列各式的值：

(1) $|30-33| + |7-11| - |12-9|$

(2) $|22-8| - |9+3| + |3-7|$

《解》

4

範例

練習

(1) 哪些數的絕對值為3？

(2) 哪些整數的絕對值小於3？

《解》 (1) 3 或 -3

(2) -2, -1, 0, 1, 2

(1) 哪些數的絕對值為6？

(2) 哪些整數的絕對值小於6？

《解》

重點整理

相反數的定義

1. 數線上，位於原點兩側，且與原點距離相等的兩點所代表的數互為相反數。

例 -4 和 4 互為相反數

2. 任意數都有相反數，而0的相反數為0。

3. 若 a 、 b 兩數互為相反數，則 $|a| = |b|$ 且 $a + b = 0$ 。

例 $9 + (-9) = 0$ ，則9和-9互為相反數

5

範例

練習

求下列各式的值：

(1) $|-4.8|$ 的相反數

(2) $-|7-11|$ 的相反數

(3) 已知 $x+1$ 與 13 互為相反數，求 $x = ?$

《解》 (1) $|-4.8| = 4.8$ 的相反數為 -4.8

(2) $-|7-11| = -(11-7) = -4$ 的相反數
為 4

(3) $\because x+1$ 與 13 互為相反數

$\therefore x+1+13=0 \Rightarrow x=-14$

求下列各式的值：

(1) $|6-23|$ 的相反數

(2) $-|(-10)|$ 的相反數

(3) 已知 -15 與 $x-4$ 互為相反數，求 $x = ?$

《解》

1-2 整數的四則運算

重點整理

整數的加法運算

1. 同號數相加：

(1) 正數 + 正數：結果為正數。

例 $5 + 7 = 12$

(2) 負數 + 負數：結果為負數。

例 $(-5) + (-7) = -(5 + 7) = -12$

2. 異號數相加：

正數 + 負數或負數 + 正數：結果可能為正數、0 或負數。

例 $(-5) + 7 = 7 - 5 = 2$

$5 + (-7) = -(7 - 5) = -2$

3. 任意數 + 0：結果為原來的數。

例 $5 + 0 = 5$ ， $-7 + 0 = -7$

1

範 例

練 習

求下列各式的值：

(1) $(-25) + (-42)$

(2) $5 + (-11)$

(3) $(-9) + 14$

(4) $(-27) + 38 + (-53) + (-38)$

《解》 (1) $(-25) + (-42) = -(25 + 42) = -67$

(2) $5 + (-11) = -(11 - 5) = -6$

(3) $(-9) + 14 = 14 - 9 = 5$

(4) $(-27) + 38 + (-53) + (-38)$
 $= (-27) + (-53) + 38 + (-38)$
 $= -(27 + 53) + 38 - 38 = -80$

求下列各式的值：

(1) $(-17) + (-28)$

(2) $7 + (-18)$

(3) $(-11) + 15$

(4) $19 + (-5) + (-2) + (-19)$

《解》

重點整理

整數的減法運算

1. 甲數減去乙數，就是甲數加上乙數的相反數。

例 $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$

2. 大數－小數：結果為正數。

例 $10 - 2 = 8$

3. 小數－大數：結果為負數。

例 $2 - 10 = 2 + (-10) = -(10 - 2) = -8$

2

範例

練習

求下列各式的值：

(1) $18 - (-6)$

(2) $(-9) - 5$

(3) $(-8) - (-11)$

《解》 (1) $18 - (-6) = 18 + 6 = 24$

(2) $(-9) - 5 = (-9) + (-5) = -(9 + 5)$
 $= -14$

(3) $(-8) - (-11) = (-8) + 11 = 11 - 8 = 3$

求下列各式的值：

(1) $8 - (-20)$

(2) $(-17) - 18$

(3) $(-6) - (-15)$

《解》

重點整理

整數的乘法運算

1. 同號的二數相乘，其乘積為正數，即正正得正，負負得正。

例 $9 \times 4 = (-9) \times (-4) = 36$

2. 異號的二數相乘，其乘積為負數，即正負得負，負正得負。

例 $9 \times (-4) = -(9 \times 4) = -36$

$(-9) \times 4 = -(9 \times 4) = -36$

3. 任意數與0的乘積為0。

例 $5 \times 0 = 0$

4. (1) 偶數個負數連乘，其乘積為正數。例 $(-2) \times (-2) \times (-3) \times (-3) = 36$

(2) 奇數個負數連乘，其乘積為負數。例 $(-2) \times (-2) \times (-3) = -12$

3

範 例

練 習

求下列各式的值：

(1) $3 \times (-12)$

(2) $(-9) \times 5$

(3) $(-4) \times (-11)$

(4) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4)$

(5) $(-312) \times (-25) \times 0 \times 369$

《解》 (1) $3 \times (-12) = -(3 \times 12) = -36$

(2) $(-9) \times 5 = -(9 \times 5) = -45$

(3) $(-4) \times (-11) = +(4 \times 11) = 44$

(4) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4)$

$= +(1 \times 2 \times 3 \times 4) = 24$

(5) $(-312) \times (-25) \times 0 \times 369 = 0$

求下列各式的值：

(1) $21 \times (-4)$

(2) $(-15) \times 5$

(3) $(-7) \times (-8)$

(4) $(-2) \times (-4) \times (-5) \times (-6)$

(5) $(-111) \times (-9) \times 4 \times 0$

《解》

重點整理

整數的除法運算

1. 同號的二數相除，所得的商為正數。

例 $15 \div 3 = (-15) \div (-3) = 5$

2. 異號的二數相除，所得的商為負數。

例 $15 \div (-3) = -(15 \div 3) = -5$

$(-15) \div 3 = -(15 \div 3) = -5$

3. 0 除以非零的數所得的商為 0。

例 $0 \div 4 = 0$

4. 任意數除以 0 為無意義。

例 $4 \div 0$ 為無意義

4

範例

練習

求下列各式的商：

(1) $54 \div (-3)$

(2) $(-60) \div 4$

(3) $120 \div (-15)$

(4) $(-121) \div (-11)$

《解》 (1) $54 \div (-3) = -(54 \div 3) = -18$

(2) $(-60) \div 4 = -(60 \div 4) = -15$

(3) $120 \div (-15) = -(120 \div 15) = -8$

(4) $(-121) \div (-11) = 121 \div 11 = 11$

求下列各式的商：

(1) $256 \div (-4)$

(2) $(-78) \div 3$

(3) $270 \div (-18)$

(4) $(-144) \div (-12)$

《解》

5

範例

練習

求下列各式的商：

(1) $(-91) \div (-13)$

(2) $0 \div (-19)$

(3) $100 \div 0$

《解》 (1) $(-91) \div (-13) = 91 \div 13 = 7$

(2) $0 \div (-19) = 0$

(3) $100 \div 0$ 無意義

求下列各式的商：

(1) $(-126) \div (-7)$

(2) $0 \div (-53)$

(3) $(-123) \div 0$

《解》

重點整理

去括號運算

- 在一算式中，若混有加、減、乘、除等多種運算，須先乘除後加減。若遇到括號時，應依括號的順序計算。
- 去括號時，先算小括號「()」，再做中括號「[]」，最後為大括號「{ }」。
- 去括號的符號法則：
 $+(a) = a$ ， $+(-a) = -a$ ， $-(a) = -a$ ， $-(-a) = a$

6

範 例

練 習

求下列各式的值：

$$(1) 10 - \{5 - [(-3) - (-5)] - (-15)\}$$

$$(2) \{1 - [2 - (3 - 4) + 5] - 6\} - (-7)$$

《解》 (1) $10 - \{5 - [(-3) - (-5)] - (-15)\}$

$$= 10 - \{5 - [(-3) + 5] + 15\}$$

$$= 10 - \{5 - 2 + 15\}$$

$$= 10 - 18 = -8$$

(2) $\{1 - [2 - (3 - 4) + 5] - 6\} - (-7)$

$$= \{1 - [2 - (-1) + 5] - 6\} + 7$$

$$= \{1 - [2 + 1 + 5] - 6\} + 7$$

$$= \{1 - 8 - 6\} + 7 = -13 + 7 = -6$$

求下列各式的值：

$$(1) -21 - \{10 - [2 - (-9)] - (-7)\}$$

$$(2) \{-8 - [13 - (9 - 10) - 4] + 11\} + (-34)$$

《解》

7

範 例

練 習

求下列各式的值：

$$(1) 12 + (-3) \times [36 - (-5) \times (-6)] \div (-2)$$

$$(2) 200 \div [(-3) \times (-4) - 2] - (-5) \times 3 + 7$$

《解》 (1) $12 + (-3) \times [36 - (-5) \times (-6)]$

$$\div (-2)$$

$$= 12 + (-3) \times [36 - 30] \div (-2)$$

$$= 12 + (-3) \times 6 \div (-2)$$

$$= 12 + (-18) \div (-2) = 12 + 9 = 21$$

(2) $200 \div [(-3) \times (-4) - 2] - (-5)$

$$\times 3 + 7$$

$$= 200 \div [12 - 2] - (-15) + 7$$

$$= 200 \div 10 + 15 + 7$$

$$= 20 + 15 + 7 = 42$$

求下列各式的值：

$$(1) (-5) + 2 \times [29 - (-4) \times (-5)] \div (-6)$$

$$(2) [(-13) \times 7 - 9] \div (-5) - 4 \times (-3) - 2$$

《解》

1-3 指數

重點整理

指數律與性質

1. 設 a 為實數， n 為正整數，則 $\overbrace{a \times a \times a \cdots \times a}^{n \text{ 個 } a} = a^n$ ，其中 a 稱為底數， n 稱為指數。
2. 指數律與運算規則：設 a 、 b 是不等於 0 的整數， m 、 n 是正整數，則

$$\begin{aligned} (1) a^m \times a^n &= a^{m+n} & (2) (a^m)^n &= a^{mn} & (3) (ab)^n &= a^n b^n & (4) \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ (5) \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} & (6) a^0 &= 1 & (7) a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}$$

1

範例

練習

求下列各式中的未知數：

$$(1) 2^3 \times 2^4 \times 2^5 = 2^a$$

$$(2) (5^7)^6 = 5^b$$

$$(3) \frac{5^7}{5^6} = 5^c$$

$$(4) 24^2 = 2^p \times 3^q$$

《解》 (1) $2^3 \times 2^4 \times 2^5 = 2^{3+4+5} = 2^{12} = 2^a$
 $\therefore a = 12$

(2) $(5^7)^6 = 5^{7 \times 6} = 5^{42} = 5^b \quad \therefore b = 42$

(3) $\frac{5^7}{5^6} = 5^{7-6} = 5^1 = 5^c \quad \therefore c = 1$

(4) $24^2 = (2^3 \times 3)^2 = 2^{3 \times 2} \times 3^2$
 $= 2^6 \times 3^2 = 2^p \times 3^q$
 $\therefore p = 6, q = 2$

求下列各式中的未知數：

$$(1) 3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^a$$

$$(2) (7^5)^3 = 7^b$$

$$(3) \frac{7^6}{7^4} = 7^c$$

$$(4) 54^2 = 2^p \times 3^q$$

《解》

2

分數的四則運算

2-1 分數的加減法

重點整理

分數的加減法運算

1. 一個負分數，可以將負號放在分子，也可以放在分母。 **例** $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$
2. 分數相加或相減時，先將它們通分，即以所有分母的最小公倍數作為新分母，再把每一分數擴分，然後再做分子相加或相減。 **例** $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$
3. 帶分數相加或相減時，可把帶分數的整數部分與分數部分分別相加或相減，然後再合併。或化成假分數再通分與擴分後相加或相減。
例 $13\frac{5}{7} + 9\frac{1}{7} = 13 + \frac{5}{7} + 9 + \frac{1}{7} = (13+9) + \left(\frac{5}{7} + \frac{1}{7}\right) = 22\frac{6}{7}$
 $2\frac{1}{3} - 1\frac{3}{5} = \frac{7}{3} - \frac{8}{5} = \frac{35-24}{15} = \frac{11}{15}$
4. 分數的運算結果須化成最簡分數。

1

範例

練習

求下列各式的值：

$$(1) \frac{6}{11} + \left(-\frac{7}{11}\right) - \frac{5}{11} \quad (2) \frac{4}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$(3) 3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3}$$

《解》 (1) $\frac{6}{11} + \left(-\frac{7}{11}\right) - \frac{5}{11}$

$$= \frac{6+(-7)-5}{11} = -\frac{6}{11}$$

$$(2) \frac{4}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12+10}{15} = \frac{22}{15}$$

$$(3) 3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} = \frac{7}{2} - \frac{8}{3} = \frac{21-16}{6} = \frac{5}{6}$$

求下列各式的值：

$$(1) \frac{3}{13} - \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{2}{13} \quad (2) \frac{6}{7} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(3) 4\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4}$$

《解》

2-2 分數的乘除法

重點整理

分數的乘法運算

1. 分數相乘時，只要把分子相乘作為新分子，分母相乘作為新分母，所得新分數就是它們的乘積。即設 a, b, c, d 皆為非零整數，則 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ 。

$$\text{例} \quad \frac{2}{3} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2 \times (-4)}{3 \times 5} = -\frac{8}{15}$$

2. 分數相乘時，若分子和分母有公因數，則可先約去公因數再相乘。

$$\text{例} \quad \left(-\frac{3}{\cancel{8}_2}\right) \times \left(-\frac{\cancel{4}^1}{7}\right) = \frac{(-3) \times (-1)}{2 \times 7} = \frac{3}{14}$$

1

範例

練習

求下列各式的值：

$$(1) \frac{3}{8} \times \left(-\frac{4}{10}\right) \times \frac{14}{9}$$

$$(2) 3\frac{1}{2} \times \left(-1\frac{1}{9}\right) \times (-2)$$

$$\begin{aligned} \text{《解》} (1) \quad & \frac{3}{8} \times \left(-\frac{4}{10}\right) \times \frac{14}{9} \\ & \frac{\cancel{3}^1 \times \left(-\cancel{4}^1\right) \times \cancel{14}^7}{\cancel{8}_2 \times \cancel{10}_5 \times \cancel{9}_3} = -\frac{7}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 3\frac{1}{2} \times \left(-1\frac{1}{9}\right) \times (-2) \\ & = \frac{7}{2} \times \left(-\frac{10}{9}\right) \times (-2) \\ & = \frac{7 \times (-10) \times \left(-\cancel{2}^1\right)}{\cancel{2}_1 \times 9} = \frac{70}{9} \end{aligned}$$

求下列各式的值：

$$(1) \frac{7}{10} \times \left(-\frac{16}{21}\right) \times \frac{11}{8}$$

$$(2) \left(-4\frac{2}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{6}\right) \times 3$$

《解》

重點整理

分數的除法運算

1. 倒數：一個不為0的分數其分子和分母對調，所得新分數稱為原分數的倒數。

例 $\frac{4}{3}$ 的倒數為 $\frac{3}{4}$

2. 分數相除時就是被除數乘以除數的倒數，即設 a, b, c, d 皆為非零整數，則

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}。$$

例 $\frac{5}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{9}$

3. 帶分數相乘或相除時，需先將帶分數化為假分數，再做乘除運算。

例 $3\frac{1}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{4}$

2

範例

練習

求下列各式的值：

(1) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{9}$

(2) $\frac{11}{4} \div \left(-\frac{132}{9}\right)$

(3) $7\frac{1}{5} \div 4\frac{1}{2}$

《解》 (1) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$

(2) $\frac{11}{4} \div \left(-\frac{132}{9}\right) = \frac{11}{4} \times \left(-\frac{9}{132}\right) = -\frac{3}{16}$

(3) $7\frac{1}{5} \div 4\frac{1}{2} = \frac{36}{5} \div \frac{9}{2} = \frac{36}{5} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{5}$

求下列各式的值：

(1) $\frac{3}{4} \div \frac{4}{5}$

(2) $\frac{7}{5} \div \left(-\frac{91}{3}\right)$

(3) $8\frac{1}{3} \div 5\frac{1}{4}$

《解》

3

範例

練習

求下列各式的值：

$$(1) \frac{2}{3} \times \left(-2\frac{2}{5}\right) \div (-4) \div \frac{3}{10}$$

$$(2) \frac{3}{4} \div \left(\frac{9}{14} \times 3\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

《解》 (1) $\frac{2}{3} \times \left(-2\frac{2}{5}\right) \div (-4) \div \frac{3}{10}$

$$= \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_1} \times \left(-\frac{\cancel{4}^4}{\cancel{5}_1}\right) \times \left(-\frac{1}{\cancel{4}_1}\right) \times \frac{\cancel{10}^1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$(2) \frac{3}{4} \div \left(\frac{9}{14} \times 3\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{4} \div \left(\frac{9}{\cancel{14}_2} \times \frac{\cancel{7}^1}{2}\right) - \frac{3+2}{6} = \frac{3}{4} \div \frac{9}{4} - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_1} \times \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{9}_3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{2-5}{6}$$

$$= -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

求下列各式的值：

$$(1) 2 \div \left(-\frac{3}{4}\right) \times 1\frac{3}{4} \div (-7)$$

$$(2) \left(2 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \div \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

《解》

重點整理

繁分數化簡運算

設 a 、 b 、 c 、 d 均是不為 0 的整數，則

$$\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \right) = \frac{ad}{bc} \quad (\text{內項乘積為分母，外項乘積為分子})。$$

4

範例

練習

求下列各值：

$$(1) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{6}} \quad (2) \frac{\frac{7}{1}}{\frac{5}{3}}$$

《解》 (1) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{6}} = \frac{\cancel{2}^1 \times 7}{3 \times \cancel{6}_3} = \frac{7}{9}$

(2) $\frac{\frac{7}{1}}{\frac{5}{3}} = \frac{7 \times 3}{5 \times 1} = \frac{21}{5}$

求下列各值：

$$(1) \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} \quad (2) \frac{\frac{12}{7}}{\frac{1}{2}}$$

《解》

重點整理

比、比值與比例式

1. 比和比值：

(1) 已知 a 、 b 兩數，若 $b \neq 0$ ，則 a 與 b 的比為 $a:b$ ，其中 a 稱為前項， b 稱為後項，而 $\frac{a}{b}$ 稱為 $a:b$ 的比值。

例 4 和 9 的比為 $4:9$ ，其比值為 $\frac{4}{9}$

(2) 已知 a 、 b 、 m 三數，若 $b \neq 0$ ， $m \neq 0$ ，則 $a:b = ma:mb = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$ 。

例 $3:2 = (5 \times 3) : (5 \times 2) = \frac{3}{5} : \frac{2}{5}$

2. 比例式：

(1) 設 a 、 b 、 c 、 d 均為不等於 0 的實數，則 $a:b=c:d$ 稱為比例式，其中 a 、 d 稱為比例外項， b 、 c 稱為比例內項。

(2) 若 $a:b=c:d$ ，則 $ad=bc$ （外項乘積=內項乘積）。

例 $x:2=y:5 \Rightarrow 5x=2y$

(3) 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ，則 $ad=bc$ （交叉相乘）。

例 $\frac{a}{b}=\frac{7}{3} \Rightarrow 3a=7b$

5

範例

練習

(1) 已知 a 、 b 均為不等於 0 的實數，且 $3a=4b$ ，求 $a:b=?$

(2) 已知 a 、 b 均為不等於 0 的實數，且 $\frac{2}{3}a=\frac{3}{5}b$ ，求 $a:b=?$

《解》(1) $3a=4b$

$$\Rightarrow a:b=4:3$$

(2) $\frac{2}{3}a=\frac{3}{5}b$

$$\Rightarrow a:b=\frac{3}{5}:\frac{2}{3}=9:10$$

(1) 已知 a 、 b 均為不等於 0 的實數，且 $11a=7b$ ，求 $a:b=?$

(2) 已知 a 、 b 均為不等於 0 的實數，且 $\frac{9}{4}a=\frac{2}{3}b$ ，求 $a:b=?$

《解》

3

一元一次方程式與不等式

3-1 一元一次方程式

重點整理

一元一次方程式

1. 一元一次方程式：

設 a 、 b 為實數，且 $a \neq 0$ ，則形如 $ax+b=0$ 的式子，稱為一元一次方程式，即只含一種未知數，且未知數的最高次數為一次的方程式。

例 $x+2=3$ 、 $2x-1=0$ 都是一元一次方程式

2. 解一元一次方程式：

運用移項法則：依據等量公理，將一個數從等號的一邊移到等號的另一邊，應遵守下列移項法則。

(1) 「+」變「-」。

例 $x+2=5 \Rightarrow x+2-2=5-2 \Rightarrow x=5-2$ ，即等號兩邊同減2

(2) 「-」變「+」。

例 $x-5=3 \Rightarrow x-5+5=3+5 \Rightarrow x=3+5$ ，即等號兩邊同加5

(3) 「 $\times$ 」變「 $\div$ 」。**例** $3x=18 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{18}{3} \Rightarrow x=\frac{18}{3}$ ，即等號兩邊同除以3

(4) 「 $\div$ 」變「 $\times$ 」。**例** $\frac{x}{3}=2 \Rightarrow \frac{x}{3} \times 3=2 \times 3 \Rightarrow x=2 \times 3$ ，即等號兩邊同乘以3

1

範例

練習

解下列各方程式：

(1) $x+3=6$

(2) $x-2=5$

(3) $3x=24$

(4) $\frac{x}{2}=6$

《解》(1) $x+3=6 \Rightarrow x=6-3=3$

(2) $x-2=5 \Rightarrow x=5+2=7$

(3) $3x=24 \Rightarrow x=\frac{24}{3}=8$

(4) $\frac{x}{2}=6 \Rightarrow x=6 \times 2=12$

解下列各方程式：

(1) $x+5=7$

(2) $x-4=6$

(3) $4x=28$

(4) $\frac{x}{4}=5$

《解》

重點整理

方程式 $ax + b = 0$ 的解法

已知一元一次方程式 $ax + b = 0$ ，則

- (1) 若 $a \neq 0$ 時， $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b$ ，則 $x = -\frac{b}{a}$ ，即方程式恰有一個解。
 (2) 若 $a = 0$ 、 $b = 0$ 時， $0 \times x + 0 = 0 \Rightarrow 0 \times x = 0$ ，則 x 為任意數，即方程式有無限多個解。
 (3) 若 $a = 0$ 、 $b \neq 0$ 時， $0 \times x + b = 0 \Rightarrow 0 \times x = -b$ ，則 x 不存在，即方程式無解。

2

範例

練習

解下列各方程式：

- (1) $3x - 4 = 5$ (2) $\frac{1}{2}x + 1 = 3$
 (3) $3x = x$ (4) $5 - 7x = -5x - 1$
 《解》(1) $3x - 4 = 5 \Rightarrow 3x = 9$
 $\Rightarrow x = 3$
 (2) $\frac{1}{2}x + 1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 2$
 $\Rightarrow x = 4$
 (3) $3x = x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$
 (4) $5 - 7x = -5x - 1 \Rightarrow -2x = -6$
 $\Rightarrow x = 3$

解下列各方程式：

- (1) $5x - 3 = 7$ (2) $\frac{1}{3}x - 2 = 2$
 (3) $2x = -3x$ (4) $4 - 2x = -5x - 2$
 《解》

3

範例

練習

解下列各方程式：

- (1) $-x - 2x = 0$
 (2) $3(-2x - 5) + 2x = 9$
 (3) $x - \frac{5-x}{2} = 8$
 《解》(1) $-x - 2x = 0 \Rightarrow -3x = 0$
 $\Rightarrow x = 0$
 (2) $3(-2x - 5) + 2x = 9$
 $\Rightarrow -6x - 15 + 2x = 9$
 $\Rightarrow -4x = 24 \Rightarrow x = -6$
 (3) $x - \frac{5-x}{2} = 8$
 $\Rightarrow 2x - (5 - x) = 16$
 $\Rightarrow 2x - 5 + x = 16$
 $\Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$

解下列各方程式：

- (1) $-3x + x = 0$
 (2) $2(3 - x) = -4(x + 5)$
 (3) $x + \frac{x-1}{3} = 15$
 《解》

4

範例

練習

解下列各方程式：

(1) $x+1=x-3$

(2) $2x=2x+5$

(3) $3x+4=3x+4$

(4) $2(3x-2)=3(2x+1)-7$

《解》 (1) $x+1=x-3 \Rightarrow 0x=-4$

 $\therefore$ 無解

(2) $2x=2x+5 \Rightarrow 0x=5$

 $\therefore$ 無解

(3) $3x+4=3x+4 \Rightarrow 0x=0$

 $\therefore$ 任意數

(4) $2(3x-2)=3(2x+1)-7$

$\Rightarrow 6x-4=6x+3-7$

$\Rightarrow 0x=0 \therefore$ 任意數

解下列各方程式：

(1) $x-5=x+6$

(2) $3x=3x-4$

(3) $4x+5=4x+5$

(4) $5(4x+1)+2=4(5x-1)+11$

《解》

5

範例

練習

解下列各方程式：

(1) $x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$

(2) $x-\frac{15-4x}{3}=2$

(3) $(4x+7)-x=(3x+4)-3$

《解》 (1) $x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4} \Rightarrow 4x=4+2x+x$

$\Rightarrow x=4$

(2) $x-\frac{15-4x}{3}=2$

$\Rightarrow 3x-(15-4x)=6$

$\Rightarrow 3x-15+4x=6$

$\Rightarrow 7x=21 \Rightarrow x=3$

(3) $(4x+7)-x=(3x+4)-3$

$\Rightarrow 3x+7=3x+1 \Rightarrow 0x=-6$

 $\therefore$ 無解

解下列各方程式：

(1) $x=1+\frac{x}{3}+\frac{x}{9}$

(2) $-2x+\frac{9+x}{2}=3$

(3) $2x-3[x-(1+x)]=13+2x$

《解》

3-2 一元一次不等式

重點整理

一元一次不等式及其解

1. 一元一次不等式：設 a 、 b 為實數，且 $a \neq 0$ ，則 $ax+b>0$ 、 $ax+b<0$ 、 $ax+b\geq 0$ 、 $ax+b\leq 0$ 均稱為一元一次不等式。

例 $2x-4>0$ 、 $5x+8\leq 0$ 都是一元一次不等式。

2. 不等式的運算性質：設 a 、 b 、 c 為實數，則

(1) 若 $a>b$ 且 $b>c$ ，則 $a>c$ 。

(2) 若 $a>b$ ，則 $a+c>b+c$ ， $a-c>b-c$ 。

(3) 若 $a>b$ ，且 $c>0$ ，則 $ac>bc$ ， $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ 。

(4) 若 $a>b$ ，且 $c<0$ ，則 $ac<bc$ ， $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ 。

3. 一元一次不等式的解：設 a 、 b 為實數，則

a	不等式	解	圖示
$a>0$	$ax+b>0$	$x>-\frac{b}{a}$	
	$ax+b\geq 0$	$x\geq-\frac{b}{a}$	
	$ax+b<0$	$x<-\frac{b}{a}$	
	$ax+b\leq 0$	$x\leq-\frac{b}{a}$	
$a<0$	$ax+b>0$	$x<-\frac{b}{a}$	
	$ax+b\geq 0$	$x\leq-\frac{b}{a}$	
	$ax+b<0$	$x>-\frac{b}{a}$	
	$ax+b\leq 0$	$x\geq-\frac{b}{a}$	

1

範例

練習

解下列各不等式，並圖示其解：

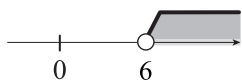
(1) $x+2>8$

(2) $5x<12$

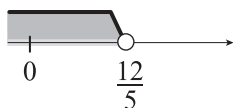
(3) $-3x>9$

(4) $3x-6\leq 4x+1$

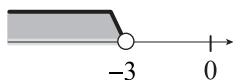
《解》(1) $x+2>8 \Rightarrow x>6$



(2) $5x<12 \Rightarrow x<\frac{12}{5}$

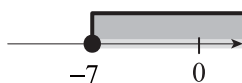


(3) $-3x>9 \Rightarrow x<-3$



(4) $3x-6\leq 4x+1 \Rightarrow -7\leq x$

$\Rightarrow x\geq -7$



解下列各不等式，並圖示其解：

(1) $3x+2\leq -10$

(2) $5-4x<-5$

(3) $2x\geq 3$

(4) $-2x+1\geq -x+7$

《解》

2

範例

練習

解不等式 $1\leq \frac{3x-1}{2} < 4$ 。

《解》 $1\leq \frac{3x-1}{2} < 4 \Rightarrow 2\leq 3x-1 < 8$

$\Rightarrow 3\leq 3x < 9 \Rightarrow 1\leq x < 3$

解不等式 $-5\leq 2x+3\leq 13$ 。

《解》

3

範例

練習

解不等式 $x\geq 3x-4 > -2x+1$ 。

《解》① $x\geq 3x-4 \Rightarrow 4\geq 2x \Rightarrow x\leq 2$

② $3x-4 > -2x+1 \Rightarrow 5x > 5$

$\Rightarrow x > 1$

由①②得 $1 < x \leq 2$

解不等式 $3x-3 < 9\leq 4x+1$ 。

《解》

4

二元一次（聯立）方程式

4-1 二元一次方程式及其圖形

重點整理

二元一次方程式及其解

1. 二元一次方程式：

設 a 、 b 、 c 為實數且 $ab \neq 0$ ，形如 $ax + by = c$ 的式子，稱為二元一次方程式，即含有兩個未知數且未知數的最高次數都是一次的方程式。

例 $x - 2y = 3$ ， $4x + y = 0$ 都是二元一次方程式

2. 二元一次方程式的解：

用一組已知數代入二元一次方程式中的兩個未知數 x 、 y ，若能使等號兩邊的值相等，則這組數就稱為二元一次方程式的解。

例 $x = 1$ ， $y = 2$ 代入 $4x - y = 2$ 中得 $4 \times 1 - 2 = 2$ ，使等號兩邊的值相等，則 $x = 1$ ， $y = 2$ 為 $4x - y = 2$ 的一組解

1

範例

練習

(1) 已知 x 、 y 為正整數，求方程式

$2x + 3y = 30$ 有幾組解？

(2) 已知 x 、 y 為正整數或 0，求方程式

$2x + 3y = 30$ 有幾組解？

《解》(1)

x	3	6	9	12
y	8	6	4	2

$\therefore$ 共有 4 組解

(2)

x	0	3	6	9	12	15
y	10	8	6	4	2	0

$\therefore$ 共有 6 組解

(1) 已知 x 、 y 為正整數，求方程式

$5x + 2y = 60$ 有幾組解？

(2) 已知 x 、 y 為正整數或 0，求方程式

$5x + 2y = 60$ 有幾組解？

《解》

重點整理 二元一次方程式的圖形類型

1. 二元一次方程式的圖形：

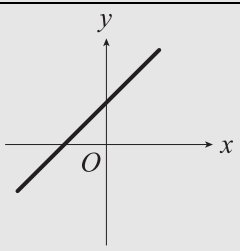
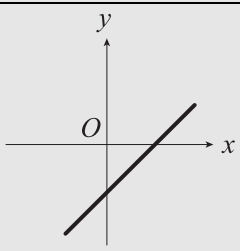
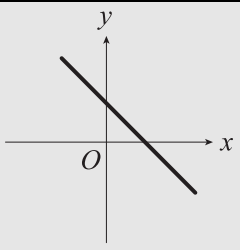
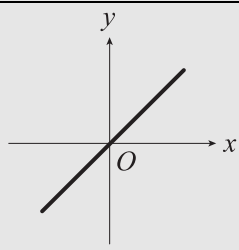
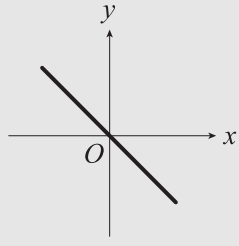
二元一次方程式的每一組解都可以用數對 (x, y) 表示，將這些數對描繪在坐標平面上，即形成二元一次方程式的圖形且圖形為一直線。

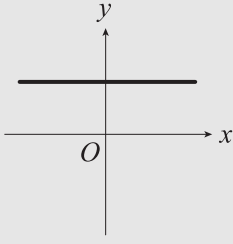
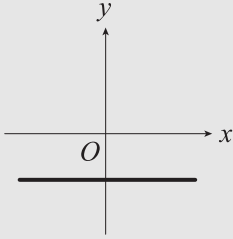
2. 二元一次方程式圖形的類型：

(1) 方程式 $ax + by = c$

條件	圖形
$abc \neq 0$	不通過原點的斜直線
$ab \neq 0, c = 0$	通過原點的斜直線
$a = 0, bc \neq 0$	平行 x 軸的直線（水平線）
$b = 0, ac \neq 0$	平行 y 軸的直線（鉛垂線）

(2) 方程式 $y = ax + b$

條件	圖形		
$ab \neq 0$	不通過原點的斜直線		
	$a > 0$	$b > 0$ 	$b < 0$ 
		$a < 0$	$b > 0$ 
	通過原點的直線		
$a \neq 0, b = 0$	$a > 0$ 		
	$a < 0$ 		

平行 x 軸的直線		
$a=0, b \neq 0$	$b > 0$	
	$b < 0$	

3. 特殊直線：

條件	直線方程式
x 軸	$y = 0$
y 軸	$x = 0$
通過點 (a, b) 且平行 x 軸	$y = b$ (水平線)
通過點 (a, b) 且平行 y 軸	$x = a$ (鉛垂線)
與 $ax + by = c$ 平行	$ax + by = k$, 其中 $k \neq c$
通過點 $(a, 0)$, $(0, b)$, 其中 $ab \neq 0$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2

範例

練習

(1) 若點 $(-2, 5)$ 在直線 $4x + ay = 17$ 上，求 a 的值。

(2) 若點 $(3, a)$ 在直線 $5x + 2y = 1$ 上，求 a 的值。

《解》 (1) 點 $(-2, 5)$ 代入 $4x + ay = 17$ 中得

$$4 \times (-2) + 5a = 17 \Rightarrow 5a = 25$$

$$\Rightarrow a = 5$$

(2) 點 $(3, a)$ 代入 $5x + 2y = 1$ 中得

$$5 \times 3 + 2a = 1 \Rightarrow 2a = -14$$

$$\Rightarrow a = -7$$

(1) 若點 $(3, -1)$ 在直線 $ax - 8y = 41$ 上，求 a 的值。

(2) 若點 $(a, 6)$ 在直線 $4x + 3y = -2$ 上，求 a 的值。

《解》

3

範例

練習

設 $A(1,4)$, $B(b,-3)$ 兩點同在直線 $x+2y=a$ 上, 求 $a-b$ 的值。

《解》 點 $A(1,4)$ 代入 $x+2y=a$ 中得

$$1+2\times 4=a \Rightarrow a=9$$

$$\therefore \text{直線 } x+2y=9$$

點 $B(b,-3)$ 代入 $x+2y=9$ 中得

$$b+2\times(-3)=9 \Rightarrow b=15$$

$$\therefore a-b=9-15=-6$$

設 $A(a,3)$, $B(-2,4)$ 兩點同在直線 $2x+by=8$ 上, 求 $a+b$ 的值。

《解》

4

範例

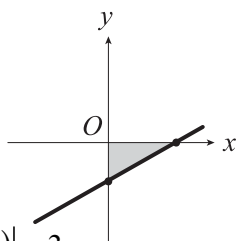
練習

求直線 $2x-3y=6$ 與兩軸所圍成的三角形面積。

《解》 $2x-3y=6$

x	3	0
y	0	-2

$$\therefore \text{面積} = \frac{1}{2} \times |3 \times (-2)| = 3$$



求直線 $3x+4y=24$ 與兩軸所圍成的三角形面積。

《解》

5

範例

練習

求通過點 $(-5,4)$ 且平行 x 軸的直線方程式。

《解》 $y=4$

求通過點 $(-6,-3)$ 且平行 y 軸的直線方程式。

《解》

6

範例

練習

求滿足下列各條件的直線方程式：

(1) 通過 $(-4, 0)$ ， $(0, 3)$ 兩點

(2) 通過點 $(3, -5)$ 且與直線 $x + 2y = 5$ 平行

《解》(1) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow -3x + 4y = 12$

$\Rightarrow 3x - 4y = -12$

(2) 設所求直線 $x + 2y = k$

點 $(3, -5)$ 代入 $x + 2y = k$ 中得

$3 + 2 \times (-5) = k \Rightarrow k = -7$

$\therefore x + 2y = -7$

求滿足下列各條件的直線方程式：

(1) 通過 $(5, 0)$ ， $(0, -1)$ 兩點

(2) 通過點 $(-2, -4)$ 且與直線 $3x - y = 6$ 平行

《解》

4-2 二元一次聯立方程式及其圖形

重點整理

二元一次聯立方程式及其解法

1. 二元一次聯立方程式：

二個二元一次方程式並列在一起，稱為二元一次聯立方程式或二元一次方程組。

例 $\begin{cases} 3x - 2y - 9 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ 為二元一次聯立方程式

2. 二元一次聯立方程式的解法：

(1) 代入消去法。

(2) 加減消去法。

3. 求通過 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 兩點的直線方程式：

設直線方程式為 $y = ax + b$ ，將 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) 代入直線方程式中，解聯立方程式求得 a 、 b 的值，再將 a 、 b 代回直線方程式即為所求。

1

範例

練習

解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} y = 2x \\ 8x + 5y = 180 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

《解》 (1) $\begin{cases} y = 2x \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 8x + 5y = 180 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

$$\textcircled{1} \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得 } 8x + 5 \times 2x = 180$$

$$\Rightarrow 18x = 180 \Rightarrow x = 10$$

$$\text{將 } x = 10 \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } y = 20$$

$$\therefore x = 10, y = 20$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 5 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x - y = 7 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{將 } x = 4 \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } y = 1$$

$$\therefore x = 4, y = 1$$

$$(3) \begin{cases} 4x + 2y = -2 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x - 3y = 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \times 2 \text{ 得 } 4x - 6y = 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{ 得 } 8y = -4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\text{將 } y = -\frac{1}{2} \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } 4x - 1 = -2$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{4}, y = -\frac{1}{2}$$

解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} y = x + 2 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + y = -3 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$$

《解》

2

範例

練習

解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ x - y = -1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$$

《解》 (1) $\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x - y = -1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

①代入②得 $\frac{2}{3}y - y = -1$

$\Rightarrow y = 3$

將 $y = 3$ 代入①得 $x = 2$

$\therefore x = 2, y = 3$

(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 4x + 3y = -2 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

① $\times 3$ 得 $9x - 6y = 21 \cdots \cdots \textcircled{3}$

② $\times 2$ 得 $8x + 6y = -4 \cdots \cdots \textcircled{4}$

③+④ 得 $17x = 17 \Rightarrow x = 1$

將 $x = 1$ 代入①得 $3 - 2y = 7$

$\Rightarrow y = -2$

$\therefore x = 1, y = -2$

解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y \\ x + y = -10 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = -4 \end{cases}$$

《解》

3

範例

練習

求通過(2,5)和(3,7)兩點的直線方程式。

《解》 設直線 $y = ax + b$

(2,5), (3,7) 代入 $y = ax + b$ 中得

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 3a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 直線 $y = 2x + 1$

求通過(-2,4)和(1,1)兩點的直線方程式。

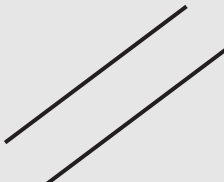
《解》

重點整理

二元一次聯立方程式的圖形類型

二元一次聯立方程式的解之幾何意義：

設 a_1 、 b_1 、 c_1 、 a_2 、 b_2 、 c_2 均為實數，且 $a_1b_1 \neq 0$ ， $a_2b_2 \neq 0$ ，則聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解為兩直線 $a_1x + b_1y = c_1$ 與 $a_2x + b_2y = c_2$ 的交點坐標。

係數條件	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
聯立方程式的解	恰有一組解	無解	無限多組解
幾何意義	兩直線交於一點	兩直線平行	兩直線重合
圖形			
例	$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$

4

範例

練習

求下列聯立方程式各有幾組解，並說明兩直線的幾何意義：

$$(1) \begin{cases} 3x + y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x - 8y = 7 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$$

《解》(1) $\because \frac{3}{1} \neq \frac{1}{3}$

$\therefore$ 恰有一組解，兩直線交於一點

$$(2) \because \frac{1}{4} = \frac{-2}{-8} \neq \frac{5}{7}$$

$\therefore$ 無解，兩直線平行

$$(3) \because \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{-9}$$

$\therefore$ 無限多組解，兩直線重合

求下列聯立方程式各有幾組解，並說明兩直線的幾何意義：

$$(1) \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x - 6y = -5 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 3y = 2 \\ -2x - 6y = -4 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

《解》

5

範例

練習

若 $\begin{cases} 3x + ay + b = 0 \\ -6x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$ 有無限多組解，求 a 、 b 的值。

《解》 $\because$ 無限多組解

$$\therefore \frac{3}{-6} = \frac{a}{4} = \frac{b}{-5}$$

$$\Rightarrow a = -2, b = \frac{5}{2}$$

若 $\begin{cases} ax - 2y + 3 = 0 \\ 5x + y + b = 0 \end{cases}$ 有無限多組解，求 a 、 b 的值。

《解》

6

範例

練習

若兩直線 $ax - 2y + 6 = 0$ 與 $x - 5y + 3 = 0$ 的交點在 x 軸上，求 a 的值。

《解》 令 $y = 0$ 代入 $x - 5y + 3 = 0$ 中得

$$x - 5 \times 0 + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$\therefore$ 交點 $(-3, 0)$

代入 $ax - 2y + 6 = 0$ 中得

$$a \times (-3) - 2 \times 0 + 6 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

若兩直線 $5x - 3y = 12$ 與 $x + ky = 4$ 的交點在 y 軸上，求 k 的值。

《解》

5

乘法公式與因式分解

5-1 乘法公式

重點整理

分配律與常用乘法公式

1. 乘法分配律：

$$(1) a(b+c) = ab+ac$$

$$(2) (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

2. 平方公式：

$$(1) \text{和的平方公式：} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) \text{差的平方公式：} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3) \text{平方差公式：} (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

3. 立方公式：

$$(1) \text{立方和公式：} (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

$$(2) \text{立方差公式：} (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

4. 性質符號變換：

$$(1) (-a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$(2) (-a+b)^2 = (b-a)^2 = (a-b)^2$$

$$(3) (-a+b)(-a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

5. 乘法公式延伸求值：

$$(1) a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$(2) (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

$$(3) (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

1

範例

練習

求下列各式的值：

$$(1) 207^2$$

$$(2) 996^2$$

$$(3) 2008 \times 1992$$

$$(4) 198^2 - 98^2$$

$$(5) \left(26\frac{1}{2}\right)^2 - \left(23\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{《解》 } (1) \quad 207^2 &= (200 + 7)^2 \\ &= 200^2 + 2 \times 200 \times 7 + 7^2 \\ &= 40000 + 2800 + 49 = 42849 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 996^2 &= (1000 - 4)^2 \\ &= 1000^2 - 2 \times 1000 \times 4 + 4^2 \\ &= 1000000 - 8000 + 16 \\ &= 992016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad 2008 \times 1992 &= (2000 + 8)(2000 - 8) \\ &= 2000^2 - 8^2 \\ &= 4000000 - 64 \\ &= 3999936 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad 198^2 - 98^2 &= (198 + 98)(198 - 98) \\ &= 296 \times 100 = 29600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \left(26\frac{1}{2}\right)^2 - \left(23\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(26\frac{1}{2} + 23\frac{1}{2}\right) \left(26\frac{1}{2} - 23\frac{1}{2}\right) \\ &= 50 \times 3 = 150 \end{aligned}$$

求下列各式的值：

$$(1) 103^2$$

$$(2) 598^2$$

$$(3) 206 \times 194$$

$$(4) 299^2 - 199^2$$

$$(5) \left(65\frac{1}{2}\right)^2 - \left(34\frac{1}{2}\right)^2$$

《解》

2

範例

練習

在下列各空格中填入適當的數：

$$(1)(20+8)(20^2-20\times 8+8^2)=20^3+\underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2)(100-2)(100^2+100\times 2+2^2)=\underline{\hspace{2cm}}-2^3$$

《解》(1) 由立方和公式知

$$(20+8)(20^2-20\times 8+8^2)$$

$$=20^3+8^3$$

(2) 由立方差公式知

$$(100-2)(100^2+100\times 2+2^2)$$

$$=100^3-2^3$$

在下列各空格中填入適當的數：

$$(1)(50+3)(50^2-\underline{\hspace{2cm}}+3^2)=50^3+3^3$$

$$(2)(30-7)(\underline{\hspace{2cm}}+30\times 7+7^2)=30^3-7^3$$

《解》

3

範例

練習

展開下列各式：

$$(1)-5x(x+2) \quad (2)x(3x+2y-4)$$

$$(3)(a+b)(x-2y) \quad (4)(x-4)(x+5)$$

$$(5)(3x-1)(-3x+2)$$

《解》(1) $-5x(x+2)=-5x^2-10x$

(2) $x(3x+2y-4)=3x^2+2xy-4x$

(3) $(a+b)(x-2y)$

$$=ax-2ay+bx-2by$$

(4) $(x-4)(x+5)=x^2+5x-4x-20$

$$=x^2+x-20$$

(5) $(3x-1)(-3x+2)$

$$=-9x^2+6x+3x-2$$

$$=-9x^2+9x-2$$

展開下列各式：

$$(1)-6x(x-1) \quad (2)5x(x-3y+2)$$

$$(3)(3a-b)(2x+y) \quad (4)(x+3)(x-4)$$

$$(5)(-2x-1)(2x+3)$$

《解》

4

範例

練習

展開下列各式：

$$(1)(2x+3y)^2 \quad (2)(5x^2-4y)^2$$

《解》 (1) $(2x+3y)^2$

$$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2$$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

(2) $(5x^2-4y)^2$

$$= (5x^2)^2 - 2 \times 5x^2 \times 4y + (4y)^2$$

$$= 25x^4 - 40x^2y + 16y^2$$

展開下列各式：

$$(1)(3x-2y)^2 \quad (2)(7x+8y^2)^2$$

《解》

5

範例

練習

展開下列各式：

$$(1)(-3x+2)(-3x-2)$$

$$(2)(1-x)(1+x)(1+x^2)$$

$$(3)(3a-b+2)(3a-b-2)$$

《解》 (1) $(-3x+2)(-3x-2)$

$$= (3x-2)(3x+2)$$

$$= (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$$

(2) $(1-x)(1+x)(1+x^2)$

$$= (1-x^2)(1+x^2) = 1^2 - (x^2)^2$$

$$= 1 - x^4$$

(3) $(3a-b+2)(3a-b-2)$

$$= (3a-b)^2 - 2^2$$

$$= 9a^2 - 6ab + b^2 - 4$$

展開下列各式：

$$(1)(-7+2x)(-7-2x)$$

$$(2)(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

$$(3)(2x+3y-4)(2x+3y+4)$$

《解》

6

範例

練習

展開下列各式：

(1) $(3x+2)(9x^2-6x+4)$

(2) $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{6}+\frac{1}{9}\right)$

(3) $(7a^2+3b^2)(49a^4-21a^2b^2+9b^4)$

《解》 (1) 原式 $= (3x+2)[(3x)^2-3x \times 2+2^2]$

$$= (3x)^3 + 2^3 = 27x^3 + 8$$

(2) 原式

$$= \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x}{2} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{x^3}{8} - \frac{1}{27}$$

(3) 原式

$$= (7a^2+3b^2)$$

$$\left[(7a^2)^2 - 7a^2 \times 3b^2 + (3b^2)^2\right]$$

$$= (7a^2)^3 + (3b^2)^3 = 343a^6 + 27b^6$$

展開下列各式：

(1) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$

(2) $\left(\frac{x}{7}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{x^2}{49}-\frac{x}{28}+\frac{1}{16}\right)$

(3) $(a^2-4b^2)(a^4+4a^2b^2+16b^4)$

《解》

7

範例

練習

若 $a+b=4$ ， $ab=3$ ，求：

(1) a^2+b^2 (2) a^3+b^3 (3) $(a-b)^2$

《解》 (1) $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$= 4^2 - 2 \times 3 = 10$$

(2) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$= 4 \times (10-3) = 28$$

(3) $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$$= 4^2 - 4 \times 3 = 4$$

若 $a+b=5$ ， $ab=4$ ，求：

(1) a^2+b^2 (2) a^3+b^3 (3) $(a-b)^2$

《解》

8

範例

練習

若 $a-b=-5$ ， $ab=3$ ，求：

(1) a^2+b^2 (2) a^3-b^3 (3) $(a+b)^2$

《解》 (1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
 $=(-5)^2+2\times 3=31$
 (2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
 $=(-5)\times(31+3)=-170$
 (3) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
 $=(-5)^2+4\times 3=37$

若 $a-b=-4$ ， $ab=5$ ，求：

(1) a^2+b^2 (2) a^3-b^3 (3) $(a+b)^2$

《解》

5-2 因式分解

重點整理

因式分解

1. 由數字與文字相乘而得的式子，稱為單項式。

例 $5x$ ， $2xy$ ， $3ab$

2. 由有限個單項式的和組成的式子，稱為多項式。

例 $x^2+x+(-20)$ ， $a^2+(-2ab)+b^2$

3. 將一個多項式分解為質因式的連乘積，則此過程稱為因式分解。

4. 常用因式分解的方法：

(1) 直接提公因式法 例 $ab+ac=a(b+c)$

(2) 分組提公因式法 例 $ab+ac+bd+cd=a(b+c)+d(b+c)=(b+c)(a+d)$

(3) 乘法公式法 例 $x^2-2x+1=(x-1)^2$

(4) 十字交乘法 例 $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$$\begin{array}{r} 1 \times -2 \\ 1 \times +1 \\ \hline -2 + 1 = -1 \end{array}$$

1

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $xy - xz + x$

(2) $2x^2y - 3xy^2 + 4xy$

(3) $4x^3y^2 - 5xy^2 + 3xy^3$

《解》 (1) 原式 $= x(y - z + 1)$

(2) 原式 $= xy(2x - 3y + 4)$

(3) 原式 $= xy^2(4x^2 - 5 + 3y)$

因式分解下列各式：

(1) $ab + ac - a$

(2) $5a^2b + 2ab - 7ab^2$

(3) $a^3b - 2a^2b^2 - 4a^2b^3$

《解》

2

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $(x+3)^2 - 4(x+3)$

(2) $5(x-1) - (x-1)^2$

(3) $(x+1)(x+2)^2 - (x+1)^2(x+2)$

《解》 (1) 原式 $= (x+3)(x+3-4)$

$= (x+3)(x-1)$

(2) 原式 $= (x-1)[5 - (x-1)]$

$= (x-1)(5-x+1)$

$= (x-1)(6-x)$

(3) 原式

$= (x+1)(x+2)[x+2 - (x+1)]$

$= (x+1)(x+2)(x+2-x-1)$

$= (x+1)(x+2)$

因式分解下列各式：

(1) $(x-7)^2 - 2(x-7)$

(2) $4(x+2) - (2+x)^2$

(3) $(2x-1)^2(x+3) + (2x-1)(x+3)^2$

《解》

3

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $27x^3 - 9x^2 + 3x - 1$

(2) $5xy - 5y + 3x - 3$

《解》 (1) 原式 $= (27x^3 - 9x^2) + (3x - 1)$
 $= 9x^2(3x - 1) + (3x - 1)$
 $= (3x - 1)(9x^2 + 1)$

(2) 原式 $= (5xy - 5y) + (3x - 3)$
 $= 5y(x - 1) + 3(x - 1)$
 $= (x - 1)(5y + 3)$

因式分解下列各式：

(1) $10x^3 + 15x^2 - 2x - 3$

(2) $2x + 2xy - 3y - 3$

《解》

4

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $9a^2 - 25b^2$

(2) $4a^2 + 12ab + 9b^2$

(3) $a^4 - 81b^4$

《解》 (1) 原式 $= (3a)^2 - (5b)^2$
 $= (3a + 5b)(3a - 5b)$
 (2) 原式 $= (2a)^2 + 2 \times 2a \times 3b + (3b)^2$
 $= (2a + 3b)^2$
 (3) 原式 $= (a^2)^2 - (9b^2)^2$
 $= (a^2 + 9b^2)(a^2 - 9b^2)$
 $= (a^2 + 9b^2)[a^2 - (3b)^2]$
 $= (a^2 + 9b^2)(a + 3b)(a - 3b)$

因式分解下列各式：

(1) $16x^2 - 49y^2$

(2) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

(3) $16a^4 - b^4$

《解》

5

範 例

練 習

因式分解下列各式：

$$(1) 4 - (x + y)^2 \quad (2) 64x^3 - 27$$

$$(3) x^6 - 1$$

《解》 (1) 原式 $= 2^2 - (x + y)^2$
 $= (2 + x + y)[2 - (x + y)]$
 $= (2 + x + y)(2 - x - y)$

(2) 原式 $= (4x)^3 - 3^3$
 $= (4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$

(3) 原式 $= (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 + 1)(x^3 - 1)$
 $= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)$
 $(x^2 + x + 1)$

因式分解下列各式：

$$(1) 9 - (x - y)^2 \quad (2) 8x^3 + 125$$

$$(3) x^6 - 64$$

《解》

6

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $x^2 - x - 20$

(2) $x^2 + 3x + 2$

(3) $x^2 - 3x - 28$

《解》(1) 原式 = $(x+4)(x-5)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad +4 \\ \times \quad -5 \\ \hline \end{array}$$

$4 + (-5) = -1$

(2) 原式 = $(x+1)(x+2)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad +1 \\ \times \quad +2 \\ \hline \end{array}$$

$1 + 2 = 3$

(3) 原式 = $(x+4)(x-7)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad +4 \\ \times \quad -7 \\ \hline \end{array}$$

$4 + (-7) = -3$

因式分解下列各式：

(1) $x^2 + x - 12$

(2) $x^2 - 4x - 32$

(3) $x^2 - 7x + 12$

《解》

7

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $2x^2 - 7x + 6$

(2) $5x^2 - 14x - 24$

(3) $6x^2 - 13x + 6$

《解》(1) 原式 = $(x-2)(2x-3)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \\ \times \quad -3 \\ \hline \end{array}$$

$-4 + (-3) = -7$

(2) 原式 = $(x-4)(5x+6)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \\ \times \quad +6 \\ \hline \end{array}$$

$-20 + 6 = -14$

(3) 原式 = $(2x-3)(3x-2)$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \\ \times \quad -2 \\ \hline \end{array}$$

$-9 + (-4) = -13$

因式分解下列各式：

(1) $2x^2 + x - 15$

(2) $3x^2 - 17x + 10$

(3) $6x^2 - 11x + 4$

《解》

6

根式的四則運算

6-1 平方根與立方根

重點整理 方根的意義

1. 設 $a > 0$ ，若 $x^2 = a$ ，則稱 x 為 a 的平方根，記為 $x = \pm\sqrt{a}$ ，其中稱 $\sqrt{a}$ 為正平方根， $-\sqrt{a}$ 為負平方根。

例 $\because 2^2 = 4, (-2)^2 = 4$

$\therefore 2$ 與 -2 均為 4 的平方根

2. 整數 0 的平方根只有一個數 0 ，即 $\sqrt{0} = 0$ 。
3. 求平方根

類型	技巧	例
整數	先化為標準分解式	3025 的平方根 $= \pm\sqrt{3025} = \pm\sqrt{5^2 \times 11^2} = \pm 55$
帶分數	先化為假分數	$7\frac{1}{9}$ 的平方根 $= \pm\sqrt{\frac{64}{9}} = \pm\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \pm\frac{8}{3}$
小數	先化為分數	2.89 的平方根 $= \pm\sqrt{\frac{289}{100}} = \pm\sqrt{\left(\frac{17}{10}\right)^2} = \pm\frac{17}{10}$

4. 設 a 為實數，若 $x^3 = a$ ，則稱 x 為 a 的立方根，而 $\sqrt[3]{a}$ 為 a 的一個立方根。

例 $\because 2^3 = 8 \quad \therefore 2$ 是 8 的一個立方根

1

範例

練習

求下列各數的平方根：

(1) 81 (2) 0.25 (3) $\frac{49}{16}$ (4) $1\frac{7}{9}$

《解》 (1) 81的平方根為 $\pm\sqrt{81} = \pm\sqrt{9^2} = \pm 9$

(2) 0.25的平方根為

$$\pm\sqrt{\frac{25}{100}} = \pm\sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2} = \pm\frac{5}{10} = \pm\frac{1}{2}$$

(3) $\frac{49}{16}$ 的平方根為

$$\pm\sqrt{\frac{49}{16}} = \pm\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2} = \pm\frac{7}{4}$$

(4) $1\frac{7}{9} = \frac{16}{9}$ 的平方根為

$$\pm\sqrt{\frac{16}{9}} = \pm\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \pm\frac{4}{3}$$

求下列各數的平方根：

(1) 169 (2) 0.64 (3) $\frac{25}{4}$ (4) $6\frac{19}{25}$

《解》

2

範例

練習

求下列各數的立方根：

(1) 27 (2) -0.008 (3) $-\frac{8}{125}$ (4) $2\frac{10}{27}$

《解》 (1) 27的立方根為 $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

(2) -0.008的立方根為

$$\sqrt[3]{-0.008} = \sqrt[3]{(-0.2)^3} = -0.2$$

(3) $-\frac{8}{125}$ 的立方根為

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{125}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{5}\right)^3} = -\frac{2}{5}$$

(4) $2\frac{10}{27} = \frac{64}{27}$ 的立方根為

$$\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \frac{4}{3}$$

求下列各數的立方根：

(1) -64 (2) 0.343 (3) $\frac{27}{8}$ (4) $-1\frac{91}{125}$

《解》

6-2 方根的運算

重點整理

同次方根與同類方根

1. 二個以上的方根經化簡後，開方次數相同者稱為同次方根。

例 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 為同次方根

$\sqrt[3]{5}$ 、 $\sqrt[3]{7}$ 、 $\sqrt[3]{-9}$ 為同次方根

2. 同次方根可比較大小和乘除運算。

3. 二個以上的方根經化簡後，開方次數相同且被開方數也相同者稱為同類方根。

例 $\sqrt{3}$ 、 $-2\sqrt{3}$ 為同類方根

$\sqrt[3]{5}$ 、 $4\sqrt[3]{5}$ 、 $-9\sqrt[3]{5}$ 為同類方根

4. 同類方根可加減乘除運算。

1

範例

練習

下列哪些是同次方根？

$\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{3}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $5\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{4}$ 、 $2\sqrt{5}$ 、 $-2\sqrt{2}$ 、 $6\sqrt[3]{4}$

《解》 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $5\sqrt{2}$ 、 $2\sqrt{5}$ 、 $-2\sqrt{2}$ 為同次方根

$\sqrt[3]{3}$ 、 $\sqrt[3]{4}$ 、 $6\sqrt[3]{4}$ 為同次方根

下列哪些是同次方根？

$4\sqrt{7}$ 、 $-2\sqrt{3}$ 、 $\sqrt[3]{2}$ 、 $-5\sqrt[3]{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $8\sqrt[3]{3}$ 、 $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt[3]{6}$

《解》

2

範例

練習

下列哪些是同類方根？

$\sqrt{3}$ 、 $\sqrt[3]{5}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $4\sqrt{3}$ 、 $2\sqrt[3]{5}$ 、 $-2\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{7}$ 、 $-\sqrt{6}$

《解》 $\sqrt{3}$ 、 $4\sqrt{3}$ 、 $-2\sqrt{3}$ 為同類方根

$\sqrt[3]{5}$ 、 $2\sqrt[3]{5}$ 為同類方根

下列哪些是同類方根？

$-2\sqrt{5}$ 、 $4\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{2}$ 、 $-5\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $-9\sqrt[3]{2}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $-\sqrt{7}$

《解》

重點整理

根式的加減運算

方根做加減運算時，只須把同類方根合併即可。

例 $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

3

範例

練習

求下列各式的值：

$$(1) 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$$

$$(2) 4\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 9\sqrt{5}$$

$$(3) 2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4}$$

《解》 (1) 原式 $= (2 - 5 - 7)\sqrt{3} = -10\sqrt{3}$

$$(2) \text{原式} = (4 - 9)\sqrt{5} + (-6 + 7)\sqrt{3} \\ = -5\sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$(3) \text{原式} = (2 + 5 - 1)\sqrt[3]{4} = 6\sqrt[3]{4}$$

求下列各式的值：

$$(1) -3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 9\sqrt{5}$$

$$(2) 2\sqrt{7} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{7} - \sqrt{2}$$

$$(3) 8\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{3} + 12\sqrt[3]{3}$$

《解》

重點整理

根式的乘除運算

1. 若 $a \geq 0$, $b \geq 0$, 則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 。
2. 若 a 、 b 為任意實數, 則 $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ 。
3. 若 $a \geq 0$, $b > 0$, 則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。
4. 若 a 、 b 為任意實數且 $b \neq 0$, 則 $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 。

4

範例

練習

化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

$$(2) \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$$

$$(3) \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{10}$$

$$(4) \frac{\sqrt[3]{-320}}{\sqrt[3]{40}}$$

《解》 (1) 原式 $= \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$

$$(2) \text{原式} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$$

$$(3) \text{原式} = \sqrt[3]{6 \times 10} = \sqrt[3]{60}$$

(4) 原式

$$= \sqrt[3]{\frac{-320}{40}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{5} \times \sqrt{7}$$

$$(2) \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{10}}$$

$$(3) \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{11}$$

$$(4) \frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{-4}}$$

《解》

5

範例

練習

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

(2) $\sqrt[3]{-4} \times \sqrt[3]{-3}$

(3) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

(4) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{-4}}$

《解》(1) 原式 = $\sqrt{21}$ (2) 原式 = $\sqrt[3]{12}$ (3) 原式 = $\sqrt{25} = 5$ (4) 原式 = $\sqrt[3]{-27} = -3$

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$

(2) $\sqrt[3]{-9} \times \sqrt[3]{-2}$

(3) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$

(4) $\frac{\sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{2}}$

《解》

重點整理

根式的最簡化運算

1. 設 a 、 b 為正數，則：

(1) $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

(3) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \times b}{b \times b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

2. 設 a 、 b 為實數，則：

(1) $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$ ，其中 $a \neq 0$

(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$ ，其中 $a \neq 0$

(4) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a \times b^2}{b \times b^2}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$ ，其中 $b \neq 0$

6

範例

練習

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{27}$ (2) $\sqrt{162}$ (3) $\sqrt[3]{250}$ (4) $\sqrt[3]{-32}$

《解》(1) 原式 = $\sqrt{9 \times 3} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$ (2) 原式 = $\sqrt{81 \times 2} = \sqrt{9^2 \times 2} = 9\sqrt{2}$ (3) 原式 = $\sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{5^3 \times 2} = 5\sqrt[3]{2}$ (4) 原式 = $\sqrt[3]{(-8) \times 4} = \sqrt[3]{(-2)^3 \times 4} = -2\sqrt[3]{4}$

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{125}$ (2) $\sqrt{192}$ (3) $\sqrt[3]{-72}$ (4) $\sqrt[3]{686}$

《解》

7

範例

練習

化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (2) \sqrt{\frac{3}{10}} \quad (3) \sqrt{\frac{5}{12}} \quad (4) \sqrt{\frac{7}{32}}$$

$$\text{《解》} (1) \text{ 原式} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(2) \text{ 原式} = \sqrt{\frac{3 \times 10}{10 \times 10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$(3) \text{ 原式} = \sqrt{\frac{5 \times 3}{2^2 \times 3 \times 3}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$(4) \text{ 原式} = \sqrt{\frac{7 \times 2}{4^2 \times 2 \times 2}} = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{\frac{3}{5}} \quad (2) \sqrt{\frac{4}{11}} \quad (3) \sqrt{\frac{13}{18}} \quad (4) \sqrt{\frac{19}{50}}$$

《解》

8

範例

練習

化簡下列各式：

$$(1) \sqrt[3]{32} \quad (2) \sqrt[3]{-625} \quad (3) \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \quad (4) \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$\text{《解》} (1) \text{ 原式} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{2^3 \times 4} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$(2) \text{ 原式} = \sqrt[3]{-125 \times 5} = \sqrt[3]{(-5)^3 \times 5} \\ = -5\sqrt[3]{5}$$

$$(3) \text{ 原式} = \sqrt[3]{\frac{1 \times 3^2}{3 \times 3^2}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$$

$$(4) \text{ 原式} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2}{2^2 \times 2}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$$

化簡下列各式：

$$(1) \sqrt[3]{81} \quad (2) \sqrt[3]{-72} \quad (3) \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad (4) \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$$

《解》

9

範例

練習

求下列各式的值：

(1) $5\sqrt{2} - \sqrt{8} + 7\sqrt{2} - \sqrt{18}$

(2) $9\sqrt{3} + 7\sqrt{12} - 5\sqrt{48}$

《解》 (1) 原式 $= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$
 $= 7\sqrt{2}$

(2) 原式 $= 9\sqrt{3} + 7 \times 2\sqrt{3} - 5 \times 4\sqrt{3}$
 $= 9\sqrt{3} + 14\sqrt{3} - 20\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

求下列各式的值：

(1) $\sqrt{27} - \sqrt{108} + 3\sqrt{75} - 4\sqrt{3}$

(2) $-6\sqrt{2} + \sqrt{32} + 2\sqrt{18} - 5\sqrt{8}$

《解》

10

範例

練習

求下列各式的值：

(1) $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(2) $(2 + 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$

(3) $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{6})(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$

(4) $5\sqrt{\frac{6}{5}} - 6\sqrt{\frac{10}{3}}$

《解》 (1) 原式 $= \sqrt{6} \times \sqrt{3} - \sqrt{6} \times \sqrt{2}$
 $= \sqrt{18} - \sqrt{12} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

(2) 原式
 $= 2 \times 3 - 2 \times 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \times 3$
 $- 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$
 $= 6 - 4\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 12 = -6 + 5\sqrt{2}$

(3) 原式 $= 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}$
 $+ 5\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} \times \sqrt{3}$
 $= 4\sqrt{18} - 6 + 60 - 5\sqrt{18}$
 $= 12\sqrt{2} + 54 - 15\sqrt{2} = 54 - 3\sqrt{2}$

(4) 原式 $= 5\sqrt{\frac{6 \times 5}{5 \times 5}} - 6\sqrt{\frac{10 \times 3}{3 \times 3}}$
 $= 5 \times \frac{\sqrt{30}}{5} - 6 \times \frac{\sqrt{30}}{3}$
 $= \sqrt{30} - 2\sqrt{30} = -\sqrt{30}$

求下列各式的值：

(1) $\sqrt{10}(\sqrt{5} + \sqrt{2})$

(2) $(7 - 4\sqrt{5})(4 - 3\sqrt{5})$

(3) $(7\sqrt{3} - 2\sqrt{6})(3\sqrt{6} + 4\sqrt{3})$

(4) $14\sqrt{\frac{10}{7}} + 10\sqrt{\frac{14}{5}}$

《解》

重點整理

根式的有理化

1. 利用根式的運算，將帶有根號的分母化成不帶根號的有理數為分母，此過程稱為有理化分母。

2. 有理化分母常見型式：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}, \text{ 其中 } a > 0$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}, \text{ 其中 } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}, \text{ 其中 } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$$

11

範例

練習

化簡下列各式：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$(3) \frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$$

$$(4) \frac{2}{\sqrt{5} + 1}$$

《解》(1) 原式 = $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} \\ = \sqrt{2} - 1$$

$$(3) \text{ 原式} = \frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \\ = \frac{4(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7 - 3} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

$$(4) \text{ 原式} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} \\ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

化簡下列各式：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

$$(3) \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$$

$$(4) \frac{4}{3 - \sqrt{2}}$$

《解》

12

範 例

練 習

化簡下列各式：

$$(1) \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

$$(3) \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

$$\begin{aligned} \text{《解》 (1) 原式} &= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} \\ &= \frac{7 + 2\sqrt{42} + 6}{7 - 6} \\ &= 13 + 2\sqrt{42} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 \\ &= \sqrt{5} + 1 \end{aligned}$$

化簡下列各式：

$$(1) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

$$(3) \frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} - \frac{3}{3-\sqrt{6}}$$

《解》

7

一元二次方程式

7-1 一元二次方程式

重點整理

一元二次方程式及其解法

1. 一元二次方程式：

設 a 、 b 、 c 為實數，且 $a \neq 0$ ，形如 $ax^2 + bx + c = 0$ 的式子，稱為一元二次方程式，即只含有一種未知數，且未知數的最高次數為二次的方程式。

例 $x^2 + 2x - 15 = 0$ 、 $(x-2)(x+7) = 0$ 都是一元二次方程式

2. 一元二次方程式的解（根）：

將 x 的值代入一元二次方程式中，若可使等式成立，即為一元二次方程式的解（根）。

例 $x = 3$ 代入 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 中得 $3^2 - 2 \times 3 - 3 = 0$ 等式成立，

則 $x = 3$ 稱為 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解（根）

3. 若 A 、 B 為二多項式，且 $AB = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。4. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ （其中 $a \neq 0$ ）的解法：

(1) 因式分解法。 (2) 配方法。 (3) 公式解 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

1

範例

練習

解下列各方程式：

(1) $(x-1)(x-2) = 0$ (2) $(x+2)(x-3) = 0$

《解》 (1) $(x-1)(x-2) = 0$

$$\Rightarrow x-1=0 \text{ 或 } x-2=0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ 或 } 2$$

(2) $(x+2)(x-3) = 0$

$$\Rightarrow x+2=0 \text{ 或 } x-3=0$$

$$\Rightarrow x=-2 \text{ 或 } 3$$

解下列各方程式：

(1) $(x-4)(x-7) = 0$ (2) $(x+3)(x-5) = 0$

《解》

$$(3)(2x-3)(3x-2)=0$$

$$(4)(4-3x)(x+1)=0$$

《解》 (3) $(2x-3)(3x-2)=0$

$$\Rightarrow 2x-3=0 \text{ 或 } 3x-2=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{2}{3}$$

(4) $(4-3x)(x+1)=0$

$$\Rightarrow 4-3x=0 \text{ 或 } x+1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{4}{3} \text{ 或 } -1$$

$$(3)(3x-5)(5x+3)=0$$

$$(4)(x+2)(3+4x)=0$$

《解》

2

範例

練習

解下列各方程式：

(1) $2x+x^2=0$

(2) $x^2+8x+16=0$

(3) $3x^2=0$

(4) $x^2=4$

(5) $4x^2-9=0$

(6) $(x+1)^2=16$

《解》 (1) $2x+x^2=0 \Rightarrow x(2+x)=0$

$$\Rightarrow x=0 \text{ 或 } 2+x=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ 或 } -2$$

(2) $x^2+8x+16=0 \Rightarrow (x+4)^2=0$

$$\Rightarrow x+4=0 \Rightarrow x=-4 \text{ (重根)}$$

(3) $3x^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ (重根)}$

(4) $x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

(5) $4x^2-9=0 \Rightarrow 4x^2=9$

$$\Rightarrow x^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$$

(6) $(x+1)^2=16$

$$\Rightarrow x+1=\pm\sqrt{16}=\pm 4$$

$$\Rightarrow x+1=4 \text{ 或 } -4$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ 或 } -5$$

解下列各方程式：

(1) $2x^2-x=0$

(2) $x^2-16x+64=0$

(3) $10x^2=0$

(4) $x^2=9$

(5) $36-25x^2=0$

(6) $(x-3)^2=25$

《解》

3

範例

練習

解下列各方程式：

(1) $x^2 + 3x + 2 = 0$ (2) $x^2 - 7x + 10 = 0$

(3) $x^2 + x - 6 = 0$

《解》 (1) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$\Rightarrow (x+1)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0 \text{ 或 } x+2=0$$

$$\Rightarrow x=-1 \text{ 或 } -2$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$1+2=3$$

(2) $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\Rightarrow (x-2)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x-2=0 \text{ 或 } x-5=0$$

$$\Rightarrow x=2 \text{ 或 } 5$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \\ 1 \times -5 \\ \hline \end{array}$$

$$-2+(-5)=-7$$

(3) $x^2 + x - 6 = 0$

$$\Rightarrow (x-2)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x-2=0 \text{ 或 } x+3=0$$

$$\Rightarrow x=2 \text{ 或 } -3$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \\ 1 \times +3 \\ \hline \end{array}$$

$$-2+3=1$$

解下列各方程式：

(1) $x^2 + 5x + 4 = 0$ (2) $x^2 - 8x + 12 = 0$

(3) $x^2 - 2x - 35 = 0$

《解》

4

範 例

練 習

解下列各方程式：

(1) $3x^2 + 11x - 4 = 0$ (2) $6x^2 + 5x - 6 = 0$

(3) $15x^2 + 14x - 16 = 0$ (4) $20x^2 - 71x + 63 = 0$

《解》 (1) $3x^2 + 11x - 4 = 0$

$$\Rightarrow (x+4)(3x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -4 \text{ 或 } \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1 \times +4 \\ 3 \times -1 \\ \hline \end{array}$$

$$12 + (-1) = 11$$

(2) $6x^2 + 5x - 6 = 0$

$$\Rightarrow (2x+3)(3x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 2 \times +3 \\ 3 \times -2 \\ \hline \end{array}$$

$$9 + (-4) = 5$$

(3) $15x^2 + 14x - 16 = 0$

$$\Rightarrow (3x-2)(5x+8) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ 或 } -\frac{8}{5}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times -2 \\ 5 \times +8 \\ \hline \end{array}$$

$$-10 + 24 = 14$$

(4) $20x^2 - 71x + 63 = 0$

$$\Rightarrow (4x-7)(5x-9) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{4} \text{ 或 } \frac{9}{5}$$

$$\begin{array}{r} 4 \times -7 \\ 5 \times -9 \\ \hline \end{array}$$

$$-35 + (-36) = -71$$

解下列各方程式：

(1) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ (2) $6x^2 - 7x - 20 = 0$

(3) $10x^2 + 13x - 3 = 0$ (4) $12x^2 + 17x - 7 = 0$

《解》

5

範例

練習

解下列各方程式：

(1) $x^2 - 2x - 288 = 0$ (2) $x^2 + 6x - 352 = 0$

《解》(1) $x^2 - 2x - 288 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 288$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 289$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 289$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm 17$$

$$\Rightarrow x-1 = 17 \text{ 或 } -17$$

$$\Rightarrow x = 18 \text{ 或 } -16$$

(2) $x^2 + 6x - 352 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 6x = 352$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 361$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 361$$

$$\Rightarrow x+3 = \pm 19$$

$$\Rightarrow x+3 = 19 \text{ 或 } -19$$

$$\Rightarrow x = 16 \text{ 或 } -22$$

解下列各方程式：

(1) $x^2 + 4x - 320 = 0$ (2) $x^2 - 8x - 425 = 0$

《解》

6

範例

練習

解下列各方程式：

(1) $x^2 + x - 1 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 1 = 0$

《解》(1) $a=1, b=1, c=-1$

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1)$$

$$= 1 + 4 = 5 > 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(2) $a=1, b=-2, c=-1$

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$$

$$= 4 + 4 = 8 > 0$$

$$\therefore x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

解下列各方程式：

(1) $x^2 - x - 3 = 0$ (2) $x^2 + 6x - 2 = 0$

《解》

7

範例

練習

解下列各方程式：

(1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$ (2) $3x^2 + 4x - 1 = 0$

《解》 (1) $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$

$$\begin{aligned}
 b^2 - 4ac &= 3^2 - 4 \times 2 \times (-1) \\
 &= 9 + 8 = 17 > 0 \\
 \therefore x &= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}
 \end{aligned}$$

(2) $a = 3$, $b = 4$, $c = -1$

$$\begin{aligned}
 b^2 - 4ac &= 4^2 - 4 \times 3 \times (-1) \\
 &= 16 + 12 = 28 > 0 \\
 \therefore x &= \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2 \times 3} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{6} \\
 &= \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}
 \end{aligned}$$

解下列各方程式：

(1) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (2) $2x^2 - 4x - 1 = 0$

《解》

重點整理

一元二次方程式的解（根）與判別式

設 a 、 b 、 c 為實數， $a \neq 0$ ，一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判別式為 $D = b^2 - 4ac$

判別式	$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = b^2 - 4ac = 0$	$D = b^2 - 4ac < 0$
根的性質	兩相異實根	兩相等實根	無實根
方程式的解（根）	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-b}{2a}$ （重根）	無解

8

範例

練習

判斷下列各方程式根的性質：

(1) $x^2 - 9x + 7 = 0$

(2) $3x^2 + 10x + 9 = 0$

(3) $x^2 - 4x + 4 = 0$

《解》 (1) $D = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 53 > 0$

$\therefore$ 兩相異實根

(2) $D = 10^2 - 4 \times 3 \times 9 = -8 < 0$

$\therefore$ 無實根

(3) $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$

$\therefore$ 兩相等實根

判斷下列各方程式根的性質：

(1) $2x^2 - 5x + 5 = 0$

(2) $x^2 + 7x - 4 = 0$

(3) $x^2 + 6x + 9 = 0$

《解》

9

範例

練習

若一元二次方程式 $ax^2 + ax + 5 = 0$ 的兩根相等，求 a 的值。

《解》 $\because$ 兩根相等

$$\therefore a^2 - 4 \times a \times 5 = 0 \Rightarrow a^2 - 20a = 0$$

$$\Rightarrow a(a - 20) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ 或 } 20$$

又 $a \neq 0$

$$\therefore a = 20$$

若一元二次方程式 $3x^2 + kx - k = 0$ 的兩根相等，求 k 的值。

《解》

10

範例

練習

若一元二次方程式 $ax^2 - 8x + 3 = 0$ 的兩根為相異實根，求 a 的範圍。

《解》 $\because$ 兩根相異

$$\therefore (-8)^2 - 4 \times a \times 3 > 0$$

$$\Rightarrow 64 - 12a > 0 \Rightarrow 12a < 64$$

$$\Rightarrow a < \frac{16}{3}, \text{ 但 } a \neq 0$$

若一元二次方程式 $5x^2 + 6x + k = 0$ 無實根，求 k 的範圍。

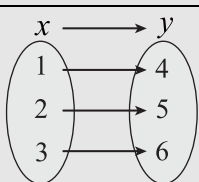
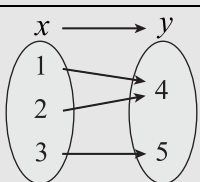
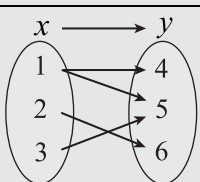
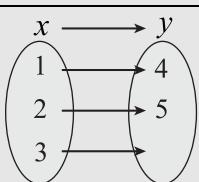
《解》

8-1 函數的定義與判別

重點整理

函數的定義與判別

1. 函數的定義：設 x 、 y 為兩個變數，對於每一個 x 值，必有一個且只有一個 y 值與之對應，則稱 y 是 x 的函數，記作 $y = f(x)$ ，其中 x 稱為自變數， y 稱為應變數。
2. 函數的判別：在 x 與 y 的對應關係中，若為「一對一」或「多對一」，則為函數；若為「一對多」或「一對無」，則不為函數。

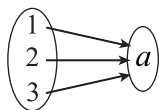
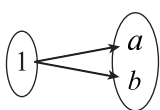
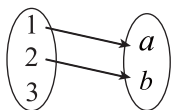
y 是 x 的函數		y 不是 x 的函數	
一對一	多對一	一對多	一對無
			

1

範例

練習

試分辨下列各 x 、 y 關係，何者具有 y 是 x 的函數關係？

(1) $x \rightarrow y$ (2) $x \rightarrow y$ (3) $x \rightarrow y$ 

《解》(1) $\because$ 對於每一個 x 值均恰可對應一個 y 值，即多對一

$\therefore y$ 是 x 的函數

(2) $\because$ 1 對應出 a 、 b 二值，即一對多

$\therefore y$ 不是 x 的函數

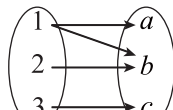
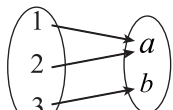
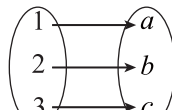
(3) $\because$ 3 沒有 y 值與之對應

$\therefore$ 不符合每一個 x 值均可對應出一個 y 值，即一對無

$\therefore y$ 不是 x 的函數

故選(1)

試分辨下列各 x 、 y 關係，何者具有 y 是 x 的函數關係？

(1) $x \rightarrow y$ (2) $x \rightarrow y$ (3) $x \rightarrow y$ 

《解》

重點整理

函數值

在函數 $y = f(x)$ 中，當 $x = a$ 時， $y = f(a)$ ，則 $f(a)$ 稱為 $f(x)$ 在 $x = a$ 的函數值。

例 設函數 $f(x) = x + 1$ ，則給定 $x = 2$ 時，函數值為 $f(2) = 2 + 1 = 3$

2

範例

練習

設 $f(x) = -3x + 5$ ，試求 $f(3)$ 的值。

《解》 $f(3) = -3 \times 3 + 5 = -9 + 5 = -4$

設 $f(x) = 4x - 13$ ，試求 $f(11)$ 的值。

《解》

3

範例

練習

設 $f(x) = 4$ ，試求 $f(-2)$ 的值。

《解》 $f(-2) = 4$

設 $f(x) = -5$ ，試求 $f(3)$ 的值。

《解》

4

範例

練習

設 $f(x) = 5|x| + 1$ ，試求 $f(-4)$ 的值。

《解》 $f(-4) = 5 \times |-4| + 1 = 20 + 1 = 21$

設 $f(x) = -6|x| + 3$ ，試求 $f(7)$ 的值。

《解》

5

範例

練習

設 $f(x) = 3x^2 - x - 10$ ，試求 $f(-7)$ 的值。

《解》 $f(-7) = 3 \times (-7)^2 - (-7) - 10$
 $= 147 + 7 - 10 = 144$

設 $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ ，試求 $f(-4)$ 的值。

《解》

6

範例

練習

設 $f(x+1) = x+3$ ，試求下列各值：

(1) $f(0)$ (2) $f(1)$ (3) $f(5)$

《解》 (1) $f(0) = f(-1+1) = -1+3 = 2$

(2) $f(1) = f(0+1) = 0+3 = 3$

(3) $f(5) = f(4+1) = 4+3 = 7$

設 $f(2x-1) = -x+4$ ，試求下列各值：

(1) $f(-1)$ (2) $f(9)$ (3) $f(-5)$

《解》

7

範例

練習

設 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ，試求下列各值：

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (3) $-f(2)$

《解》 (1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

(2) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$

(3) $f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
 $\therefore -f(2) = -\frac{5}{2}$

設 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ，試求下列各值：

(1) $f(3)$ (2) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ (3) $f(-3)$

《解》

8

範例

練習

已知 $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = x$ ，試求下列各值：

(1) $f(1)$ (2) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

《解》 (1) $f(1) = f\left(\frac{1}{0+1}\right) = 0$

(2) $f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2+1}\right) = 2$

已知 $f\left(\frac{2x-1}{x}\right) = -x$ ，試求下列各值：

(1) $f(1)$ (2) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

《解》

8-2 線型函數

重點整理

函數圖形與線型函數及其圖形

1. 函數圖形：

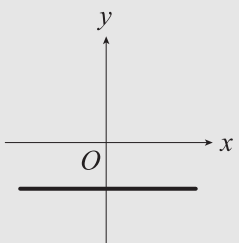
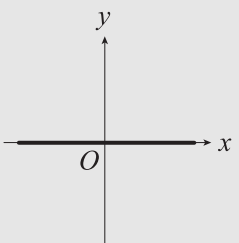
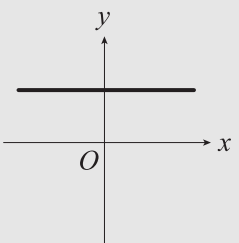
在坐標平面上，將所有滿足 $y = f(x)$ 的點 (x, y) 描繪出來所得的圖形，稱為 $f(x)$ 的函數圖形。

2. 線型函數：

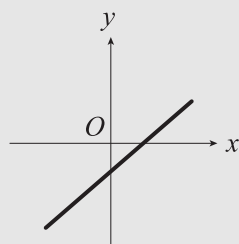
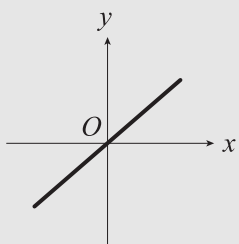
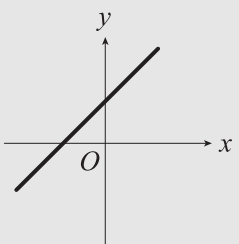
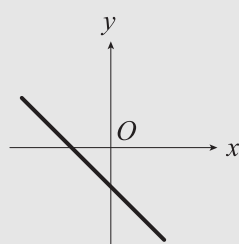
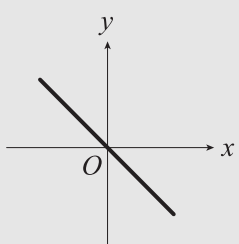
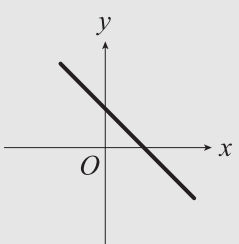
形如 $y = f(x) = ax + b$ ，其中 a 、 b 為實數，稱為線型函數。

例 $y = f(x) = 2x - 3$ ， $y = f(x) = -x$ ， $y = f(x) = 7$ 都是線型函數

(1) 當 $a = 0$ 時， $f(x) = b$ 為常數函數，圖形為水平線。

$f(x) = b$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
$a = 0$			

(2) 當 $a \neq 0$ 時， $f(x) = ax + b$ 為一次函數，圖形為斜直線。

$f(x) = ax + b$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

3. $x = h$ 的圖形為鉛垂線，並非 x 的函數圖形。

例 $x = 2$ ， $x = -3$ 的圖形都是鉛垂線

1

範例

練習

若函數 $f(x)$ 的圖形通過 $(-5, 6)$ 、 $(-1, 2)$ 、 $(3, 10)$ 三點，試求 $f(-5) - f(3) + f(-1)$ 的值。

《解》 $\because f(x)$ 的圖形過 $(-5, 6)$ ， $(-1, 2)$ ， $(3, 10)$
 $\therefore f(-5) = 6$ ， $f(-1) = 2$ ， $f(3) = 10$
 故 $f(-5) - f(3) + f(-1)$
 $= 6 - 10 + 2 = -2$

若函數 $f(x)$ 的圖形通過 $(4, -7)$ 、 $(0, 3)$ 、 $(-2, -1)$ 三點，試求 $f(4) + f(0) - f(-2)$ 的值。

《解》

2

範例

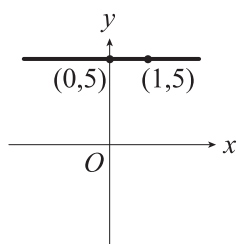
練習

在坐標平面上，畫出下列各函數的圖形：

(1) $f(x) = 5$ (2) $f(x) = x + 3$

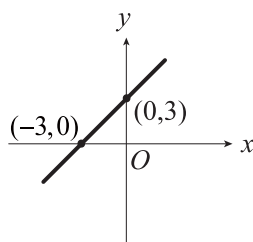
《解》 (1) $y = f(x) = 5$

x	0	1
y	5	5



(2) $y = f(x) = x + 3$

x	0	-3
y	3	0



在坐標平面上，畫出下列各函數的圖形：

(1) $f(x) = -3$ (2) $f(x) = -x + 2$

《解》

3

範例

練習

設函數 $y = f(x) = x - 2$ ，試求：

(1) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸、 y 軸的交點坐標

(2) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與兩軸所圍的三角形面積

《解》 (1) $y = f(x) = x - 2$

x	2	0
y	0	-2

$\therefore$ 與 x 軸的交點為 $(2, 0)$ ，

與 y 軸的交點為 $(0, -2)$

$$(2) \text{面積} = \frac{1}{2} \times 2 \times |-2| = 2$$

設函數 $y = f(x) = -2x + 6$ ，試求：

(1) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸、 y 軸的交點坐標

(2) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與兩軸所圍的三角形面積

《解》

4

範例

練習

設函數 $f(x) = 5x + b$ ，且 $f(1) = 3$ ，試求 b 值。

《解》 $\because f(1) = 3$

$$\therefore 5 + b = 3 \Rightarrow b = -2$$

設函數 $f(x) = -2x + b$ ，且 $f(5) = -6$ ，試求 b 值。

《解》

5

範例

練習

已知函數 $f(x) = ax + b$ ，且 $f(1) = 3$ ， $f(3) = 11$ ，試求：

(1) a 、 b 的值

(2) $f(-2)$ 的值

$$\text{《解》 (1) } \begin{cases} f(1) = 3 \\ f(3) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = 4x - 1$$

$$\therefore f(-2) = -8 - 1 = -9$$

已知函數 $f(x) = ax + b$ ，且 $f(-2) = 4$ ， $f(5) = -3$ ，試求：

(1) a 、 b 的值

(2) $f(1)$ 的值

《解》

8-3 二次函數

重點整理

二次函數及其圖形

1. 二次函數：

形如 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 、 c 為實數， $a \neq 0$ ，稱為二次函數。

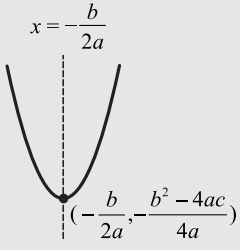
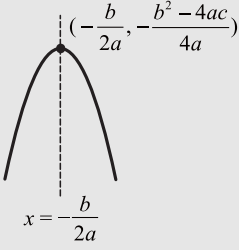
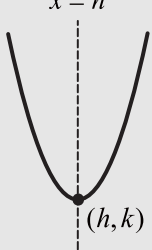
例 $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$ ， $y = f(x) = -2x^2$ 都是二次函數

2. 二次函數的圖形：

(1) 二次函數的圖形為開口向上或向下、左右對稱的拋物線。

(2) 將二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 經配方法化為 $y = f(x) = a(x - h)^2 + k$ ，即

$$\begin{aligned} y = f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

型式	一般式		頂點式	
二次函數	$y = ax^2 + bx + c$		$y = a(x - h)^2 + k$	
頂點坐標	$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$		(h, k)	
對稱軸	$x = -\frac{b}{2a}$		$x = h$	
係數 a	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
開口方向	向上	向下	向上	向下
頂點	最低點	最高點	最低點	最高點
極值	當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時， y 有最小值 $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$	當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時， y 有最大值 $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$	當 $x = h$ 時， y 有最小值 k	當 $x = h$ 時， y 有最大值 k
圖示				
開口大小	$ a $ 愈大，開口愈小； $ a $ 愈小，開口愈大			
與 y 軸交點	$(0, c)$		$(0, ah^2 + k)$	

3. 二次函數圖形與兩軸的交點：

設二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 、 c 為實數且 $a \neq 0$

(1) 與 x 軸交點：令 $y = 0$ 代入得一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，求解。

(2) 與 y 軸交點：令 $x = 0$ 代入得 $y = c$ ，即交點為 $(0, c)$

(3) 與 x 軸的交點個數：可利用判別式 $D = b^2 - 4ac$ 判斷

判別式	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
交點個數	2	1	0
交點坐標	$\left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, 0 \right)$ $\left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, 0 \right)$	$\left(\frac{-b}{2a}, 0 \right)$	無交點

1

範例

練習

試求下列各二次函數的頂點坐標與對稱軸：

(1) $y = x^2$ (2) $y = -2x^2 + 1$ (3) $y = (x - 1)^2$

《解》(1) 頂點 $(0, 0)$ ，對稱軸 $x = 0$

(2) 頂點 $(0, 1)$ ，對稱軸 $x = 0$

(3) 頂點 $(1, 0)$ ，對稱軸 $x = 1$

試求下列各二次函數的頂點坐標與對稱軸：

(1) $y = -x^2$ (2) $y = 3x^2 - 2$ (3) $y = (x + 5)^2$

《解》

2

範例

練習

試求下列函數圖形的最高點或最低點：

(1) $f(x) = (x - 1)^2 + 4$

(2) $f(x) = -5(x + 2)^2 + 1$

《解》(1) $\because a = 1 > 0$

$\therefore$ 圖形的最低點為 $(1, 4)$

(2) $\because a = -5 < 0$

$\therefore$ 圖形的最高點為 $(-2, 1)$

試求下列函數圖形的最高點或最低點：

(1) $f(x) = 3(x + 4)^2 - 2$

(2) $f(x) = -2\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}$

《解》

3

範例

練習

試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = 4x^2 + 1$

(2) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$

(3) $f(x) = 2(x+5)^2 + 6$

《解》 (1) $f(x) = 4x^2 + 1 \geq 1$

當 $x = 0$ 時， $f(x)$ 有最小值 1

(2) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3 \leq 3$

當 $x = -1$ 時， $f(x)$ 有最大值 3

(3) $f(x) = 2(x+5)^2 + 6 \geq 6$

當 $x = -5$ 時， $f(x)$ 有最小值 6

試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = 3x^2 + 2$

(2) $f(x) = -4(x-5)^2 + 4$

(3) $f(x) = 5(x-4)^2 - 1$

《解》

4

範例

練習

試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = x^2 + 4x$

(2) $f(x) = -2x^2 + 4x$

《解》 (1) $f(x) = x^2 + 4x = x^2 + 4x + 2^2 - 2^2$

$$= (x+2)^2 - 4 \geq -4$$

當 $x = -2$ 時， $f(x)$ 有最小值 -4

(2) $f(x) = -2x^2 + 4x = -2(x^2 - 2x)$

$$= -2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2)$$

$$= -2(x-1)^2 + 2 \leq 2$$

當 $x = 1$ 時， $f(x)$ 有最大值 2

試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = x^2 + 6x$

(2) $f(x) = -3x^2 - 12x$

《解》

5

範例

練習

二次函數 $y = x^2 - 3x - 4$ 的圖形與 x 軸交於 A 、 B 兩點，與 y 軸交於 C 點， O 是原點，求 $\triangle ABC$ 的面積。

《解》 令 $y = 0$ ，則

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ 或 } -1$$

$$\therefore A(4, 0), B(-1, 0)$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 則 } y = -4 \quad \therefore C(0, -4)$$

$$\therefore \overline{AB} = 5, \overline{OC} = 4$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$$

二次函數 $y = -x^2 - 3x + 10$ 的圖形與 x 軸交於 A 、 B 兩點，與 y 軸交於 C 點， O 為原點，求 $\triangle ABC$ 的面積。

《解》

6

範例

練習

求下列各二次函數圖形與 x 軸的交點個數：

(1) $y = -2x^2 + 3x + 1$

(2) $y = 3x^2 + x + 2$

(3) $y = x^2 + 2x + 1$

《解》 (1) $\because D = 3^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 17 > 0$

$\therefore$ 有 2 個交點

(2) $\because D = 1^2 - 4 \times 3 \times 2 = -23 < 0$

$\therefore$ 0 個交點

(3) $\because D = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

$\therefore$ 有 1 個交點

求下列各二次函數圖形與 x 軸的交點個數：

(1) $y = x^2 + 2x + 4$

(2) $y = x^2 + 10x + 25$

(3) $y = -3x^2 - x + 1$

《解》

重點整理

二次函數的假設法

二次函數的假設法：

類型	條件	假設	例
頂點型	頂點 $(0,0)$	$y = ax^2$	已知頂點 $(0,0)$ $\Rightarrow$ 設 $y = ax^2$
	頂點 $(0,k)$	$y = ax^2 + k$	已知頂點 $(0,5)$ $\Rightarrow$ 設 $y = ax^2 + 5$
	頂點 $(h,0)$	$y = a(x-h)^2$	已知頂點 $(2,0)$ $\Rightarrow$ 設 $y = a(x-2)^2$
	頂點 (h,k)	$y = a(x-h)^2 + k$	已知頂點 $(-1,4)$ $\Rightarrow$ 設 $y = a(x+1)^2 + 4$
	對稱軸 $x = h$	$y = a(x-h)^2 + k$	已知對稱軸 $x = 6$ $\Rightarrow$ 設 $y = a(x-6)^2 + k$
	在 $x = h$ 時， y 有最大值（最小值） k	$y = a(x-h)^2 + k$	在 $x = 4$ 時， y 有最小值 -5 $\Rightarrow$ 設 $y = a(x-4)^2 - 5$
兩點型	與 x 軸交於 $(\alpha,0)$ ， $(\beta,0)$ 兩點	$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ 或 $y = a\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + k$	與 x 軸交於 $(-3,0)$ ， $(5,0)$ 兩點 $\Rightarrow$ 設 $y = a(x+3)(x-5)$
	通過 (α,m) ， (β,m) 兩點	$y = a(x-\alpha)(x-\beta) + m$ 或 $y = a\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + k$	通過 $(-2,3)$ ， $(6,3)$ 兩點 $\Rightarrow$ 設 $y = a(x+2)(x-6) + 3$
三點型	通過相異三點	$y = ax^2 + bx + c$	通過 $(0,-2)$ ， $(1,1)$ ， $(3,5)$ 三點 $\Rightarrow$ 設 $y = ax^2 + bx + c$

7

範例

練習

求滿足下列各條件的二次函數：

(1) 頂點 $(0,0)$ 且通過點 $(2,4)$ 《解》 (1) 設 $y = ax^2$

$$(2,4) \text{ 代入得 } 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

$$\therefore y = x^2$$

求滿足下列各條件的二次函數：

(1) 頂點 $(0,0)$ 且通過點 $(2,-1)$

《解》

(2) 頂點 $(0, -2)$ 且通過點 $(-3, -11)$

(3) 頂點 $(-3, 0)$ 且通過點 $(-1, -6)$

《解》 (2) 設 $y = ax^2 - 2$

$$(-3, -11) \text{ 代入得 } 9a - 2 = -11$$

$$\Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1$$

$$\therefore y = -x^2 - 2$$

(3) 設 $y = a(x+3)^2$

$$(-1, -6) \text{ 代入得 } 4a = -6$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}(x+3)^2$$

(2) 頂點 $(0, 1)$ 且通過點 $(4, 9)$

(3) 頂點 $(2, 0)$ 且通過點 $(5, 6)$

《解》

8

範例

練習

求滿足下列各條件的二次函數：(答案以一般式表示)

(1) 以 $x = -1$ 為對稱軸，且通過 $(-2, 3)$ ， $(1, -3)$ 兩點

(2) 圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$ ， $(5, 0)$ 兩點，且通過點 $(4, 9)$

《解》 (1) 設 $y = a(x+1)^2 + k$

$$(-2, 3), (1, -3) \text{ 代入得}$$

$$\begin{cases} a+k=3 \\ 4a+k=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ k=5 \end{cases}$$

$$\therefore y = -2(x+1)^2 + 5$$

$$= -2x^2 - 4x + 3$$

(2) 設 $y = a(x-1)(x-5)$

$$(4, 9) \text{ 代入得 } a \times 3 \times (-1) = 9$$

$$\Rightarrow a = -3$$

$$\therefore y = -3(x-1)(x-5)$$

$$= -3(x^2 - 6x + 5)$$

$$= -3x^2 + 18x - 15$$

求滿足下列各條件的二次函數：(答案以一般式表示)

(1) 以 $x = 2$ 為對稱軸，且通過 $(0, 7)$ ， $(5, 12)$ 兩點

(2) 圖形與 x 軸交於 $(-3, 0)$ ， $(2, 0)$ 兩點，且通過點 $(0, -12)$

《解》

9

範例

練習

設二次函數 $f(x)$ 在 $x = -1$ 有最大值 5，且圖形通過點 $(4, -45)$ ，求 $f(1)$ 的值。

《解》 設 $f(x) = a(x+1)^2 + 5$

$$(4, -45) \text{ 代入得 } f(4) = 25a + 5 = -45$$

$$\Rightarrow 25a = -50 \Rightarrow a = -2$$

$$\therefore f(x) = -2(x+1)^2 + 5$$

$$\text{故 } f(1) = -2 \times 4 + 5 = -3$$

設二次函數 $f(x)$ 在 $x = 2$ 有最小值 -6，且圖形通過點 $(0, 6)$ ，求 $f(5)$ 的值。

《解》

10

範例

練習

已知二次函數 $y = 2x^2 + ax + 62$ ，當 $x = 3$ 時，有最小值 b ，求 $a + b$ 的值。

《解》 $y = 2x^2 + ax + 62 = 2(x-3)^2 + b$

$$= 2(x^2 - 6x + 9) + b$$

$$= 2x^2 - 12x + 18 + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ 62 = 18 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 44 \end{cases}$$

$$\therefore a + b = -12 + 44 = 32$$

已知二次函數 $y = -3x^2 + ax - 14$ ，當 $x = 1$ 時，有最大值 b ，求 $a - b$ 的值。

《解》

11

範例

練習

已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，且 $f(0) = 1$ ， $f(1) = 3$ ， $f(-1) = 7$ ，試求 $f(x)$ 。

《解》 $\therefore \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 3 \\ f(-1) = 7 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} 0 + 0 + c = 1 \\ a + b + c = 3 \\ a - b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{故 } f(x) = 4x^2 - 2x + 1$$

已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，且 $f(0) = -2$ ， $f(1) = 2$ ， $f(-2) = 8$ ，試求 $f(x)$ 。

《解》

9

等差數列與級數

9-1 等差數列

重點整理

等差數列

1. 等差數列：

在一數列中，若任意相鄰兩項，後項減前項的差均相等，則稱此數列為等差數列，而這個差稱為公差，以 d 表示。例 1, 3, 5, 7, 9 為等差數列。

2. 等差數列的一般項：

設等差數列的首項為 a_1 ，公差為 d ，第 n 項為 a_n ，第 m 項為 a_m ，則

$$(1) a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{例} \quad a_{10} = a_1 + 9d$$

$$(2) a_n = a_m + (n-m)d \quad \text{例} \quad a_{13} = a_7 + 6d$$

3. 等差中項：

若 a, b, c 三數成等差數列，則 b 稱為 a 和 c 的等差中項，且 $b = \frac{a+c}{2}$ 。

$$\text{例} \quad 6, 13, 20 \text{ 為等差數列，其中 } 13 = \frac{6+20}{2}$$

1

範例

練習

(1) 設等差數列的首項為 -6 ，公差為 7 ，求第 10 項。

(2) 設等差數列的首項為 3 ，公差為 -6 ，求第 9 項。

《解》(1) $a_1 = -6$ ， $d = 7$

$$\therefore a_{10} = a_1 + 9d = -6 + 9 \times 7 = 57$$

(2) $a_1 = 3$ ， $d = -6$

$$\begin{aligned} \therefore a_9 &= a_1 + 8d = 3 + 8 \times (-6) \\ &= -45 \end{aligned}$$

(1) 設等差數列的首項為 5 ，公差為 -3 ，求第 8 項。

(2) 設等差數列的首項為 -4 ，公差為 2 ，求第 15 項。

《解》

2

範例

練習

- (1) 若等差數列第2項為 -5 ，公差為 4 ，求第10項。
- (2) 若等差數列的首項是 37 ，第13項是 22 ，求公差。

《解》(1) $a_{10} = a_2 + 8d = -5 + 8 \times 4 = 27$

$$(2) a_{13} = a_1 + 12d \Rightarrow 22 = 37 + 12d$$

$$\Rightarrow 12d = -15$$

$$\Rightarrow d = \frac{-15}{12} = -\frac{5}{4}$$

- (1) 若等差數列第3項為 10 ，公差為 -3 ，求第12項。

- (2) 若等差數列的首項為 43 ，第9項為 31 ，求公差。

《解》

3

範例

練習

- (1) 若等差數列第9項為 -19 ，第33項為 -91 ，求第50項。
- (2) 若等差數列第4項是 51 ，第9項是 31 ，求 -57 是第幾項？

《解》(1) $a_{33} = a_9 + 24d$

$$\Rightarrow -91 = -19 + 24d$$

$$\Rightarrow 24d = -72 \Rightarrow d = -3$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{50} &= a_{33} + 17d \\ &= -91 + 17 \times (-3) = -142 \end{aligned}$$

$$(2) a_9 = a_4 + 5d \Rightarrow 31 = 51 + 5d$$

$$\Rightarrow 5d = -20 \Rightarrow d = -4$$

設 $a_n = -57$ ，則

$$a_9 + (n-9)d = -57$$

$$\Rightarrow 31 + (n-9) \times (-4) = -57$$

$$\Rightarrow (n-9) \times (-4) = -88$$

$$\Rightarrow n-9 = 22 \Rightarrow n = 31$$

$\therefore$ 第31項

- (1) 若等差數列第5項為 -60 ，第21項為 -28 ，求第40項。

- (2) 若等差數列第5項是 -33 ，第11項是 -21 ，求 -3 是第幾項？

《解》

4

範例

練習

等差數列 $-151, -145, -139, \dots$ ，求從第幾項開始為正數？

《解》 $a_1 = -151$ ， $d = -145 - (-151) = 6$

$$a_n = -151 + (n-1) \times 6 > 0$$

$$\Rightarrow n-1 > \frac{151}{6} = 25\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow n > 26\frac{1}{6}$$

$\therefore$ 取 $n = 27$

故第27項

等差數列 $113, 108, 103, \dots$ ，求從第幾項開始為負數？

《解》

5

範例

練習

(1) 求 -20 和 -2 的等差中項。

(2) 若 $2x+1$ 和 $x-2$ 的等差中項為 13 ，求 x 之值。

《解》 (1) $\frac{-20 + (-2)}{2} = -11$

(2) $\frac{2x+1+x-2}{2} = 13$

$$\Rightarrow 3x-1 = 26 \Rightarrow 3x = 27$$

$$\Rightarrow x = 9$$

(1) 求 -7 和 39 的等差中項。

(2) 若 $x-3$ 和 $3x+1$ 的等差中項為 -11 ，求 x 之值。

《解》

6

範例

練習

在 5 和 93 之間插入 7 個數，使成等差數列，求插入的第 4 個數。

《解》 令 $a_1 = 5$ ， $a_9 = 93$

$$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow 93 = 5 + 8d$$

$$\Rightarrow d = 11$$

$$\therefore a_5 = a_1 + 4d = 5 + 4 \times 11 = 49$$

在 -11 和 44 之間插入 10 個數，使成等差數列，求插入的第 7 個數。

《解》

9-2 等差級數

重點整理

等差級數

1. 等差級數：

將等差數列的各項相加，即稱為等差級數。

例 $2+6+10+14+18+22$ 為等差級數。

2. 等差級數的和：

設等差級數的首項 a_1 ，公差 d ，項數 n ，末項 a_n ，則此等差級數前 n 項的和為

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}。$$

1

範例

練習

設等差級數前18項的和為63，且第18項為2，求首項之值。

$$\begin{aligned} \text{《解》 } S_{18} &= \frac{18(a_1 + a_{18})}{2} \\ \Rightarrow 63 &= \frac{18 \times (a_1 + 2)}{2} \\ \Rightarrow a_1 + 2 &= 7 \\ \Rightarrow a_1 &= 5 \end{aligned}$$

設等差級數前14項的和為-28，且第14項為-1，求首項之值。

《解》

2

範例

練習

在-28與 x 之間插入6個數，使成等差數列，其總和為-124（含-28和 x ），求 x 的值。

$$\begin{aligned} \text{《解》 } \frac{8 \times (-28 + x)}{2} &= -124 \\ \Rightarrow -28 + x &= -31 \\ \Rightarrow x &= -3 \end{aligned}$$

在-7與 x 之間插入8個數，使成等差數列，其總和為55（含-7和 x ），求 x 的值。

《解》

3

範例

練習

(1) 求等差級數 $1+5+9+\cdots$ 到第16項的和。

(2) 求等差級數 $11+6+1+\cdots+(-104)$ 的和。

《解》 (1) $a_1 = 1$, $d = 5 - 1 = 4$

$$S_{16} = \frac{16 \times (2 \times 1 + 15 \times 4)}{2}$$

$$= 8 \times 62 = 496$$

(2) $a_1 = 11$, $d = 6 - 11 = -5$, $a_n = -104$

$$11 + (n-1) \times (-5) = -104$$

$$\Rightarrow (n-1) \times (-5) = -115$$

$$\Rightarrow n-1 = 23 \Rightarrow n = 24$$

$$\therefore S_{24} = \frac{24 \times (11 - 104)}{2}$$

$$= 12 \times (-93) = -1116$$

(1) 求等差級數 $10+7+4+\cdots$ 到第20項的和。

(2) 求等差級數 $-19+(-16)+(-13)+\cdots+107$ 的和。

《解》

4

範例

練習

從100到300的自然數中，可被13整除的有幾個？且其總和為何？

《解》 $13 \times 8 = 104$, $13 \times 23 = 299$

$\therefore$ 共有 $23 - 8 + 1 = 16$ 個

$$\text{總和} = \frac{16 \times (104 + 299)}{2} = 3224$$

從50到400的自然數中，可被19整除的有幾個？且其總和為何？

《解》

5

範例

練習

設等差級數 $-20-14-8-2+4+\cdots$ 到第 n 項的和為70，求 n 的值。

《解》 $a_1 = -20$, $d = -14 - (-20) = 6$

$$\frac{n[2 \times (-20) + (n-1) \times 6]}{2} = 70$$

$$\Rightarrow n(6n - 46) = 140$$

$$\Rightarrow 3n^2 - 23n - 70 = 0$$

$$\Rightarrow (n-10)(3n+7) = 0$$

$$\Rightarrow n = 10 \text{ 或 } -\frac{7}{3} \text{ (不合)}$$

設等差級數 $19+16+13+\cdots$ 到第 n 項的和為44，求 n 的值。

《解》